UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI
WYDZIAŁ MATEMATYKI, INFORMATYKI
I EKONOMETRII

GRAFY ROZSZERZALNE

MONIKA PERL

ROZPRAWA DOKTORSKA NAPISANA POD KIERUNKIEM
DR HAB. MARII KWAŚNIK
PROF. NDZW POLITECHNIKI SZCZECIŃSKIEJ

Zielona Góra, Szczecin 2006

Pragnę wyrazić swoją wdzięczność
Pani dr hab. Marii Kwaśnik, prof. ndzw PS
za wyrozumiałość oraz nieocenioną pomoc
w trakcie redagowania tej pracy

Spis treści

Wstęp

Brak efektywnych algorytmów wyznaczających ekstremalne zbiory wierzchołków lub krawędzi w dowolnym grafie powoduje, że szuka się klas grafów, w których wyznaczenie takich zbiorów byłoby w miarę proste. Takimi klasami są np. grafy k-rozszerzalne, dla których liczba k jest możliwie duża. W literaturze znanych jest kilka rodzajów grafów rozszerzalnych. Własność "być grafem k-rozszerzalnym" dla ustalonego k może być zdefiniowana w terminach podzbiorów zbioru wierzchołków grafu lub w terminach podzbiorów zbioru krawędzi grafu. Koncepcja k-rozszerzalności w terminach podzbiorów zbioru krawędzi ma swoje korzenie w pracy G. Hetyei'ego ([17]) z 1964 roku, który badał klasę grafów dwudzielnych, w których dowolna krawędź może być rozszerzona do zbioru zwanego skojarzeniem doskonałym, tzn. do zbioru niezależnego krawędzi pokrywającego wszystkie wierzchołki grafu. Grafy o takiej własności nazwano grafami 1-rozszerzalnymi. W tejże pracy można znaleźć trzy różne charakteryzacje 1-rozszerzalnych grafów dwudzielnych. L. Lovász i M. D. Plummer [24] (1977) podali czwartą taką charakteryzację. D. J. Hartfiel [16] (1970) podał charakteryzację jej równoważną sformułowaną w terminach macierzy. W następnym roku R. A. Brualdi i H. Perfect [3] opublikowali pierwszą charakteryzację k-rozszerzalnych grafów dwudzielnych sformułowaną w terminach macierzy ("extending partial diagonals") oraz systemu zbiorów ("extending partial systems of distinct representatives (PSDR's)"). Więcej szczegółów na temat k-rozszerzalnych grafów dwudzielnych można znaleźć w pracy M. D. Plummera [30] (1988). Szersza rodzina k-rozszerzalnych grafów, niekoniecznie dwudzielnych, pojawiła się już w latach 50-tych, kiedy to A. Kotzig [19, 20, 21] zapoczątkował teorię dekompozycji dla grafów zawierających skojarzenie doskonałe. Na początku lat 60-tych, niezależnie od siebie T. Gallai [11, 12] oraz J. Edmonds [9] zajęli się dekompozycją grafów w terminach ich największych skojarzeń. Jednym z pytań jakie sobie stawiali było kiedy graf zawiera skojarzenie doskonałe. W 1980 roku M. D. Plummer [29] opublikował pracę dotyczącą dowolnych grafów k-rozszerzalnych. Podał między innymi pełną charakteryzację grafów 2-rozszerzalnych. Inne rezultaty zawarte w tej pracy dotyczą związków między k-rozszerzalnością i $(k-1)$-rozszerzalnością grafu oraz wpływu usunięcia krawędzi z grafu na jego rozszerzalność. W 1988 roku M. D. Plummer [31] rozważał także relacje między rozszerzalnością i spójnością grafu. Skutek dodania krawędzi w grafie rozszerzalnym był rozważany przez Q. Yu w pracy [32] (1992). E. Györi i M. D. Plummer [15] (1992) rozważali produkt kartezjański grafów rozszerzalnych, a E. Györi i W. Imrich [14] (2001) silny produkt grafów rozszerzalnych.

W połowie lat 90-tych N. Dean i J. Zito [6] zdefiniowali graf k-rozszerzalny jako graf G, w którym każdy k-elementowy zbiór niezależny wierzchołków można rozszerzyć do największego (w sensie mocy) zbioru niezależnego wierzchołków w grafie G. Jest to uogólnienie grafu Berge'a, czyli grafu 1-rozszerzalnego (tzw. B-grafu) oraz grafu dobrze-pokrytego, czyli grafu k-rozszerzalnego dla każdego k ([28]). Koncepcja B-grafów pochodzi od Berge'a i pojawiła sie w drugiej połowie lat 70-tych. W pracy [1] C. Berge podał między innymi własności grafów dobrze-pokrytych (tzn. takich, w których każdy maksymalny zbiór niezależny jest największy) oraz B-grafów (każdy wierzchołek grafu jest zawarty w pewnym maksymalnym zbiorze niezależnym). Dlatego też w dalszych rozważaniach będę używać określenia "graf k-rozszerzalny wierzchołkowo w sensie Berge'a" dla odróżnienia od rozszerzalności innego rodzaju. C. Berge zdefiniował również tzw. B^*-grafy, czyli grafy, w których każdą krawędź można rozszerzyć do największego zbioru niezależnego krawędzi w tym grafie. W pracy [13] autorzy podają częściową charakteryzację grafów będących B-grafami, B^*-grafami oraz B^{**}-grafami. Zauważmy, że badanie k-rozszerzalności w sensie zbiorów wierzchołków w grafie krawędziowym danego grafu można sprowadzić do badania k-rozszerzalności w sensie podzbiorów krawędzi w danym grafie.

Największą liczbę k, dla której graf jest k-rozszerzalny w sensie podzbiorów wierzchołków (krawędzi) grafu, będziemy nazywać liczbą (indeksem) rozszerzalności grafu.

Zbiory prawie doskonałe (ang. nearly perfect) w grafie G oraz liczba $n_p(G)$, równa mocy najmniejszego 1-maksymalnego zbioru prawie doskonałego w grafie G, zostały po raz pierwszy zdefiniowane w pracy [5] z 1993 roku, jednak nie były tam szerzej omawiane. Dopiero w pracy [8] z 1995 roku autorzy zapoczątkowali badania zbiorów prawie doskonałych w grafach. Szczególną uwagę poświęcili najmniejszym zbiorom 1-maksymalnym prawie doskonałym w grafie G, czyli $n_p(G)$-zbiorom. Pokazali, że wyznaczenie parametru $n_p(G)$ jest problemem NP-zupełnym dla dowolnego grafu G. Podali jednak algorytm liniowy wyznaczający parametr $n_p(T)$ dla dowolnego drzewa T. Zbiory doskonale dominujące (ang. perfect dominating) w grafie G oraz parametr $\gamma_p(G)$, równy mocy najmniejszego zbioru doskonale dominującego w grafie G, rozważane były w pracy [5]. Autorzy pracy skupili swoją uwagę na grafach G, w których jedynym zbiorem doskonale dominującym jest cały zbiór wierzchołków, tzn. $\gamma_p(G) = |V(G)|$. M. R. Fellows i M. N. Hoover [10] wykazali, że ustalenie, czy w grafie istnieje nietrywialny zbiór doskonale dominujący (autorzy używają nazwy "semiperfect dominating") jest problemem NP-zupełnym dla grafów planarnych. Uzasadnione wydaje się być wprowadzenie parametru $p_d(G)$ oznaczającego moc najmniejszego zbioru 1-maksymalnego doskonale dominującego w grafie G, a następnie zdefiniowanie pojęcia k-rozszerzalności w sensie zbiorów prawie doskonałych oraz pojęcia k-rozszerzalności w sensie zbiorów doskonale dominujących.

Niniejsza praca dotyczy pięciu wymienionych rodzajów rozszerzalności:

- rozszerzalności w sensie Plummera,
- rozszerzalności krawędziowej w sensie Berge'a,
- rozszerzalności wierzchołkowej w sensie Berge'a,
- rozszerzalności w sensie zbiorów prawie doskonałych,
- rozszerzalności w sensie zbiorów doskonale dominujących.

Jej treść nawiązuje do problematyki przedstawionej we wcześniejszych fragmentach wstępu. Zbadane zostaną relacje między różnymi typami rozszerzalności. Przedstawione zostaną produkty grafów rozszerzalnych dla każdego typu rozszerzalności. Obliczone zostaną indeksy i liczby rozszerzalności grafów dla różnych typów rozszerzalności. Pokazane zostaną skutki operacji jednoargumentowych wykonanych na grafie rozszerzalnym.

W rozdziale pierwszym znajdują się podstawowe definicje i oznaczenia zawarte w [7] i używane w pracy. Bardziej szczegółowe oznaczenia zamieszczone będą w tych częściach pracy, w których będą wykorzystywane.

W rozdziale drugim podane są wartości indeksu rozszerzalności w sensie Plummera dla drogi P_{2l}, cyklu C_{2l}, grafu pełnego K_{2l}, grafu pełnego dwudzielnego $K_{n,n}$ oraz dla wybranych produktów grafów. W rozdziale tym rozważane są produkty grafów takie, jak: korona dwóch grafów, X-złączenie grafu X i ciągu grafów $(G_1, G_2, ..., G_n)$ ([2]), złączenie dwóch grafów przez podgraf jednego z nich oraz operacje na grafie takie, jak: t-podział krawędzi ([18]), domknięty t-podział krawędzi, ściągnięcie podgrafu do nowego wierzchołka. Dla niektórych z nich pokazana jest 1-rozszerzalność w sensie

Plummera a dla innych podany jest indeks rozszerzalności w sensie Plummera.

Rozdział trzeci zawiera wyniki dotyczący rozszerzalności krawędziowej i wierzchołkowej w sensie Berge'a. Wyznaczone są w tym rozdziale indeksy i liczby rozszerzalności krawędziowej i wierzchołkowej w sensie Berge'a: $ext^*(P_{2l+1})$, $Ext(P_{2l})$ i $ext^*(C_l)$, $Ext(C_l)$. Ponadto, badana jest rozszerzalność krawędziowa grafu otrzymanego przez t-podział krawędzi, domknięty t-podział krawędzi, duplikację wierzchołka oraz złączenie z grafem K_1. W odniesieniu do rozszerzalności wierzchołkowej rozważany jest produkt grafów zwany złączeniem n grafów. W ostatniej części tego rozdziału dokonany jest podział klasy grafów rozszerzalnych w sensie Plummera i Berge'a z indeksem rozszerzalności co najmniej 0 lub 1 i liczbą rozszerzalności co najmniej 1 na podklasy grafów o identycznych indeksach lub liczbach rozszerzalności różnych typów. Podane są przykłady grafów do nich należących oraz zależności między tymi podklasami.

Część pierwsza rozdziału czwartego zawiera własności zbiorów prawie doskonałych i doskonale dominujących w grafach i ich produktach. Wyznaczona jest między innymi moc najmniejszego 1-maksymalnego zbioru prawie doskonałego oraz najmniejszego 1-maksymalnego zbioru doskonale dominującego w grafach P_n, C_n oraz w grafie $X[G_1, G_2, ..., G_n]$ zwanym X-złączeniem grafu X i ciągu grafów $(G_1, G_2, ..., G_n)$. W drugiej części umieszczone są twierdzenia podające zależności między k-rozszerzalnością w sensie zbiorów prawie doskonałych (k-np-rozszerzalnością) i k-rozszerzalnością w sensie zbiorów doskonale dominujących (k-pd-rozszerzalnością) oraz twierdzenia dotyczące związków między k i $(k-1)$-rozszerzalnością tego samego typu rozszerzalności. Rezultaty uzyskane w pierwszej i drugiej części tego rozdziału posłużą do zbadania rozszerzalności w sensie wspomnianych podzbiorów wierzchołków grafów P_n, C_n, $P_n[G_1, G_2, ..., G_n]$, $C_n[G_1, G_2, ..., G_n]$ oraz wyznaczenia ich liczb rozszerzalności.

Część rezultatów zawartych w tej pracy była prezentowana na konferencjach naukowych. Większość wyników zawartych w rozdziale pierwszym stanowi publikację współautorską [23], podobnie jak część rezultatów z rozdziału czwartego o produkcie kartezjańskim i silnym produkcie dwóch grafów [22]. Rezultaty z ostatniego rozdziału dotyczące produktu kartezjańskiego i silnego produktu n grafów dla $n > 2$ zostały przyjęte do druku w czasopiśmie Opuscula Mathematica [26]. Pozostałe wyniki zamieszczone w rozdziale czwartym zostały przedstawione do recenzji w czasopiśmie Mathematica Slovaca [27].

Wykaz oznaczeń

G – graf spójny, prosty (graf), *9*

$V(G)$ – zbiór wierzchołków grafu G, *9*

$E(G)$ – zbiór krawędzi grafu G, *9*

$S \subset V(G)$ – podzbiór właściwy S zawarty w zbiorze V(G), *9*

$G_1 \subseteq G$ – podgraf G_1 grafu G, *9*

$G_1 \subset G$ – podgraf właściwy G_1 grafu G, *9*

$G_1 \leqslant G$ – podgraf indukowany G_1 grafu G, *9*

$G_1 < G$ – podgraf właściwy indukowany grafu G, *9*

$\langle X \rangle_G$ – podgraf G_1 grafu G indukowany przez zbiór $X \subseteq V(G)$, *9*

uv – krawędź łącząca wierzchołki u i v w grafie G, *9*

$N_G(u)$ – otwarte sąsiedztwo wierzchołka u w grafie G, *9*

$N_G[u]$ – domknięte sąsiedztwo wierzchołka u w grafie G, *9*

$deg_G(u)$ – stopień wierzchołka u w grafie G, *9*

$d_G(u, v)$ – długość najkrótszej drogi z u do v w grafie G, *10*

$\overline{K_p}$ – graf bezkrawędziowy o p wierzchołkach, *9*

P_n – graf zwany drogą o n wierzchołkach, *10*

C_n – graf zwany cyklem o n wierzchołkach, *10*

K_n – graf pełny o n wierzchołkach, *10*

$K_{m,n}$ – graf pełny dwudzielny o $m + n$ wierzchołkach, *10*

Q_n – n-wymiarowa kostka, *18*

G^r – graf będący r-tą potęgą grafu G, *10*

$L(G)$ – graf krawędziowy grafu G, *46*

$\delta(G)$ – najmniejszy stopień wierzchołka w grafie G, *9*

$\Delta(G)$ – największy stopień wierzchołka w grafie G, *9*

$\alpha(G)$ – moc największego zbioru niezależnego wierzchołków w grafie G, *10*

$\alpha(G)$-zbiór – zbiór niezależny wierzchołków mocy $\alpha(G)$ w grafie G, *10*

$\beta(G)$ – moc największego zbioru niezależnego krawędzi w grafie G, *10*

$\beta(G)$-zbiór – zbiór niezależny krawędzi mocy $\beta(G)$ w grafie G, *10*

B-graf – graf, w którym każdy wierzchołek jest zawarty w $\alpha(G)$-zbiorze, *11*

B^*-graf – graf, w którym każda krawędź jest zawarta w $\beta(G)$-zbiorze, *11*

B^{**}-graf – graf, który jest jednocześnie B-grafem i B^*-grafem, *52*

M_G – skojarzenie doskonałe w grafie G, *10*

$ext(G)$ – indeks rozszerzalności w sensie Plummera grafu G, *10*

$ext^*(G)$ – indeks rozszerzalności krawędziowej w sensie Berge'a grafu G, *11*

$Ext(G)$ – liczba rozszerzalności wierzchołkowej w sensie Berge'a grafu G, *11*

np-zbiór – zbiór prawie doskonały, *11*

$n_p(G)$ – moc najmniejszego 1-maksymalnego np-zbioru w G, *11*

$n_p(G)$-zbiór – np-zbiór mocy $n_p(G)$, *11*

$En_p(G)$ – liczba np-rozszerzalności grafu G, *12*

pd-zbiór – zbiór doskonale dominujący, *11*

$\gamma(G)$ – moc najmniejszego pd-zbioru w grafie G, *11*

$p_d(G)$ – moc najmniejszego 1-maksymalnego pd-zbioru w G, *11*

$p_d(G)$-zbiór – pd-zbiór mocy $p_d(G)$, *11*

$Ep_d(G)$ – liczba pd-rozszerzalności grafu G, *12*

$G \circ H$ – korona grafów G i H, *12*

$G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ – złączenie n grafów $G_1, G_2, ..., G_n$, *12*

$G + y = G + K_1 = K_2[G, K_1]$, *12*

$X[G_1, G_2, ..., G_n]$ – X-złączenie grafu X i ciągu $(G_1, G_2, ..., G_n)$, *12*

$G_1(G) + H$ – złączenie grafów G i H podgrafem G_1 grafu G, *12*

$S(G, H)$ – quasi-sterta grafów G i H, *12*

G_t – graf zwany t-podziałem krawędzi, *12*

$\hat{G}_t$ – graf zwany domkniętym t-podziałem krawędzi, *12*

G/H – graf zwany ściągnięciem podgrafu H grafu G do nowego wierzchołka, *13*

$G/e = G/K_2$, *13*

$G - e$ – graf z usuniętą krawędzią e, *13*

$G - A$ – graf z usuniętym zbiorem $A \subset V(G)$, *13*

$G - x$ – graf z usuniętym wierzchołkiem $x \in V(G)$, *13*

G^x – graf zwany duplikacją wierzchołka x, *13*

$G_1 \times G_2$ – produkt kartezjański grafów G_1 i G_2, *18*

$G_1 \otimes G_2$ – silny produkt grafów G_1 i G_2, *18*

$X_{i=1}^{n} S_i$ – uogólniony produkt kartezjański zbiorów $S_1, ..., S_n$, *67*

$\mathbf{X}_{i=1}^{n} G_i$ – uogólniony produkt kartezjański grafów $G_1, ..., G_n$, *67*

$\bigotimes_{i=1}^{n} G_i$ – uogólniony silny produkt grafów $G_1, ..., G_n$, *67*

Rozdział 1

Podstawowe definicje i oznaczenia

Symbolem G oznaczać będziemy graf spójny, prosty. Przez $V(G)$, $E(G)$ oznaczać będziemy zbiór *wierzchołków* i odpowiednio zbiór *krawędzi* grafu G. Symbolu $S \subset V(G)$ będziemy używać jeżeli S będzie podzbiorem właściwym zbioru $V(G)$. Elementy zbioru $E(G)$ będziemy oznaczać przez uv. Symbolem $\overline{K_p}$ będziemy oznaczać *graf bezkrawędziowy* o p wierzchołkach. Symbol $G_1 \subseteq G$ ($G_1 \subset G$) oznacza, że G_1 jest *podgrafem* (*podgrafem właściwym*) grafu G. Jeżeli G_1 jest podgrafem (podgrafem właściwym) *indukowanym* grafu G, to fakt ten zapisujemy $G_1 \leqslant G$ ($G_1 < G$) lub $G_1 = \langle X \rangle_G$ jeżeli $X = V(G_1)$, a o G_1 mówimy, że jest podgrafem grafu G *indukowanym przez zbiór* X.

Mówimy, że wierzchołki u, v są *sąsiednie* w grafie G, jeżeli istnieje krawędź uv w grafie G. Zwrotu "wierzchołki u i v są pokryte krawędzią e" będę używać jeżeli $e = uv$. $N_G(u)$ oznacza *otwarte sąsiedztwo wierzchołka u w grafie G*: tj., $N_G(u) = \{v \in V(G): \quad uv \in E(G)\}$ oraz $N_G[u]$ oznaczamy *domknięte sąsiedztwo wierzchołka u w grafie G*: tj., $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$. *Stopień wierzchołka u* w grafie G oznaczamy symbolem $deg_G(u)$ i definiujemy następująco: $deg_G(u) = |N_G(u)|$. Najmniejszy (największy) stopień wierzchołka w grafie G oznaczamy symbolem $\delta(G)$ ($\Delta(G)$). Jeżeli $deg_G(u) = 0$, to u nazywamy *wierzchołkiem izolowanym grafu G*, jeżeli $deg_G(u) = 1$, to u nazywamy *wierzchołkiem wiszącym grafu G*, a jeżeli $deg_G(u) = |V(G)| - 1$, to u

nazywamy *wierzchołkiem uniwersalnym* grafu G. Graf, w którym każdy wierzchołek jest wierzchołkiem uniwersalnym nazywamy grafem *pełnym*. Jeżeli graf pełny ma n wierzchołków, to oznaczamy go symbolem K_n. Grafem *pełnym dwudzielnym* nazywamy graf, w którym zbiór wierzchołków można podzielić na dwie rozłączne klasy V_1, V_2 tak, aby każde dwa wierzchołki należące do różnych klas były sąsiednie, a żadne dwa wierzchołki należące do tej samej klasy nie były sąsiednie. Jeżeli $|V_1| = m$ oraz $|V_n| = n$ dla $m, n \geqslant 1$, to taki graf oznaczamy symbolem $K_{m,n}$. W szczególności jeżeli $m = 1$ lub $n = 1$, to graf $K_{m,n}$ nazywamy *gwiazdą*.

Dla $n \geqslant 2$, *drogą* o n wierzchołkach nazywamy graf P_n, w którym $V(P_n) = \{x_1, x_2, ...x_n\}$ oraz $E(P_n) = \{x_1x_2, x_2x_3, ..., x_{n-1}x_n\}$. Dodatkowo, jeżeli $n = 1$, to $P_1 = K_1$. Dla $n \geqslant 3$, *cyklem* o n wierzchołkach nazywamy graf C_n, w którym $V(C_n) = V(P_n)$ oraz $E(C_n) = E(P_n) \cup \{x_1x_n\}$. *Długością* drogi P_n (cyklu C_n) nazywamy liczbę krawędzi drogi (cyklu). Ponieważ grafowi P_n odpowiada ciąg wierzchołków $x_1, x_2, ..., x_n$, dlatego będziemy pisać, że droga P_n *łączy wierzchołki* x_1 i x_n. Długość najkrótszej drogi łączącej wierzchołki u i v w grafie G nazywamy *odległością* wierzchołka u od wierzchołka v i oznaczamy $d_G(u, v)$. Dla $r \geqslant 1$, *r-tą potęgą* grafu G nazywamy graf G^r taki, że $V(G^r) = V(G)$ oraz $E(G^r) = \{uv\colon \quad u, v \in V(G)$ oraz $1 \leqslant d_G(u, v) \leqslant r\}$.

Mówimy, że podzbiór $A \subseteq V(G)$ jest *zbiorem niezależnym wierzchołków* w grafie G jeżeli dla dowolnego wierzchołka $x \in A$, $N_G(x) \cap A = \emptyset$. Moc największego zbioru niezależnego wierzchołków w grafie G oznaczamy $\alpha(G)$. Zbiór niezależny wierzchołków w grafie G mocy $\alpha(G)$ będziemy krótko nazywać *$\alpha(G)$-zbiorem. Skojarzeniem* w grafie G lub *zbiorem niezależnym krawędzi* w grafie G nazywamy podzbiór zbioru $E(G)$, w którym żadne dwie krawędzie nie są sąsiednie, czyli nie mają wspólnego wierzchołka. Moc największego zbioru niezależnego krawędzi w grafie G oznaczamy $\beta(G)$. Zbiór niezależny krawędzi w grafie G mocy $\beta(G)$ będziemy nazywać *$\beta(G)$-zbiorem.* Skojarzenie w grafie G nazywamy *skojarzeniem doskonałym* w grafie G jeżeli pokrywa ono wszystkie wierzchołki grafu G. Symbolu M_G będziemy używać do oznaczenia dowolnego skojarzenia doskonałego w grafie G.

Niech k będzie liczbą całkowitą taką, że $0 \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}|V(G)| - 1$. Graf G nazywamy *k-rozszerzalnym w sensie Plummera*, jeżeli w grafie G istnieje skojarzenie doskonałe oraz każde skojarzenie o k krawędziach można rozszerzyć do skojarzenia doskonałego w grafie G. Mówimy, że graf G jest 0-rozszerzalny w sensie Plummera jeśli zawiera skojarzenie doskonałe. *Indeksem rozszerzalności w sensie Plummera* grafu G nazywamy liczbę $ext(G) \overset{def}{=} \max\{k\colon \quad G$ jest k-rozszerzalny w sensie Plummera$\}$. Oznaczenie

$ext(G)$ pojawiło się po raz pierwszy w pracy [15].

Niech k będzie liczbą całkowitą taką, że $1 \leqslant k \leqslant \beta(G) - 1$. Wówczas graf G nazywamy *k-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a*, jeżeli każde skojarzenie o k krawędziach można rozszerzyć do $\beta(G)$-zbioru w grafie G. Jeżeli $k = 1$ albo $\beta(G) = 1$, to G jest znany w literaturze jako B^*-graf ([13]). *Indeksem rozszerzalności krawędziowej w sensie Berge'a* grafu G nazywamy liczbę $ext^*(G) \stackrel{def}{=} \max\{k\colon\ G$ jest k-rozszerzalny krawędziowo w sensie Berge'a$\}$.

Niech k będzie liczbą całkowitą taką, że $1 \leqslant k \leqslant \alpha(G) - 1$. Wówczas graf G nazywamy *k-rozszerzalnym wierzchołkowo w sensie Berge'a*, jeżeli każdy k-elementowy zbiór niezależny wierzchołków można rozszerzyć do $\alpha(G)$-zbioru. Jeżeli $k = 1$ albo $\alpha(G) = 1$, to G jest znany w literaturze jako B-graf (graf Berge'a) [1]. *Liczbą rozszerzalności wierzchołkowej w sensie Berge'a* grafu G nazywamy liczbę $Ext(G) \stackrel{def}{=} \max\{k\colon\ G$ jest k-rozszerzalny wierzchołkowo w sensie Berge'a$\}$.

Mówimy, że podzbiór $S \subseteq V(G)$ jest *zbiorem prawie doskonałym* w grafie G (krótko: *np-zbiorem* w grafie G), jeżeli każdy wierzchołek $u \in V(G) - S$ ma co najwyżej jednego sąsiada w zbiorze S ([5]). *Zbiorem doskonale dominującym* w grafie G (krótko: *pd-zbiorem* w G) nazywamy zbiór $S \subseteq V(G)$ taki, że każdy wierzchołek $u \in V(G) - S$ ma dokładnie jednego sąsiada w zbiorze S ([5]). Z definicji zbioru prawie doskonałego i doskonale dominującego wynika, że każdy pd-zbiór w dowolnym grafie jest np-zbiorem w tym grafie. Zauważmy również, że zbiór pusty, zbiór 1-elementowy oraz zbiór $V(G)$ są np-zbiorami w dowolnym grafie G oraz, że $V(G)$ jest pd-zbiorem w dowolnym grafie G. Np-zbiór (pd-zbiór) S w grafie G nazywamy 1-*maksymalnym np-zbiorem* (*pd-zbiorem*), jeżeli dla dowolnego wierzchołka $u \in V(G) - S$ zbiór $S \cup \{u\}$ nie jest np-zbiorem (pd-zbiorem) w grafie G. Zauważmy, że $V(G)$ jest 1-maksymalnym np-zbiorem (1-maksymalnym pd-zbiorem) w dowolnym grafie G. 1-maksymalny np-zbiór został po raz pierwszy zdefiniowany w pracy [5]. Moc najmniejszego 1-maksymalnego np-zbioru w grafie G oznaczamy przez $n_p(G)$ ([5]), a 1-maksymalny np-zbiór mocy $n_p(G)$ będziemy nazywać *$n_p(G)$-zbiorem.* Jeżeli G nie jest gwiazdą, to $n_p(G) < |V(G)|$ ([8]). Moc najmniejszego pd-zbioru w grafie G oznaczamy przez $\gamma_p(G)$ ([5]). Moc najmniejszego 1-maksymalnego pd-zbioru w grafie G oznaczamy przez $p_d(G)$, a 1-maksymalny pd-zbiór mocy $p_d(G)$ będziemy nazywać *$p_d(G)$-zbiorem.*

Załóżmy, że G nie jest gwiazdą $K_{1,n}$ dla $n \geqslant 1$ oraz niech k będzie liczbą całkowitą taką, że $1 \leqslant k \leqslant n_p(G) - 1$. Wówczas graf G nazywamy *k-rozszerzalnym w sensie zbiorów prawie doskonałych* (krótko: G jest *k-np-rozszerzalny*)), jeżeli każdy

k-elementowy np-zbiór można rozszerzyć do $n_p(G)$-zbioru. *Liczbą np-rozszerzalności* grafu G nazywamy liczbę $En_p(G) \overset{def}{=} \max\{k: \quad G$ jest k-np-rozszerzalny$\}$.

Załóżmy, że $p_d(G) \neq |V(G)|$ oraz niech k będzie liczbą całkowitą taką, że $1 \leqslant k \leqslant p_d(G) - 1$. Mówimy, że graf G jest *k-rozszerzalny w sensie zbiorów doskonale dominujących* (krótko: G jest *k-pd-rozszerzalny*)), jeżeli każdy k-elementowy pd-zbiór można rozszerzyć do $p_d(G)$-zbioru. *Liczbą pd-rozszerzalności* grafu G nazywamy liczbę $Ep_d(G) \overset{def}{=} \max\{k: \quad G$ jest k-pd-rozszerzalny$\}$.

Niech $|V(G)| = n$. Oznaczmy przez nH sumę rozłączną n kopii grafu H. *Koroną grafów G i H* nazywamy graf $G \circ H$ otrzymany z sumy rozłącznej grafu G oraz grafu nH przez połączenie i-tego wierzchołka grafu G z każdym wierzchołkiem i-tej kopii grafu H dla $i = 1, 2, ..., n$.

Niech $V(X) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ dla $n \geqslant 2$ będzie zbiorem wierzchołków grafu X. Oznaczmy przez $(G_1, G_2, ..., G_n)$ ciąg n rozłącznych grafów. *X-złączeniem* grafu X i ciągu $(G_1, G_2, ..., G_n)$ ([2]) nazywamy graf $X[G_1, G_2, ..., G_n]$, w którym $V(X[G_1, G_2, ..., G_n]) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V(G_i)$ oraz $E(X[G_1, G_2, ..., G_n]) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E(G_i) \cup F$, gdzie F jest zbiorem wszystkich możliwych krawędzi łączących wierzchołki zbiorów $V(G_i)$, $V(G_j)$ dla $i \neq j \in \{1, 2, ...n\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i x_j \in E(X)$. Jeśli $X = K_n$, to $K_n[G_1, G_2, ..., G_n] = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ – złączenie n grafów $G_1, G_2, ..., G_n$. W szczególności, jeżeli $K_1 = \{y\}$, to $K_2[G, K_1] = G + K_1 = G + y$. Jeżeli natomiast $G_i = G$ dla $i = 1, 2, ..., n$, to graf $X[\underbrace{G, G, ..., G}_{n}]$ jest produktem leksykograficznym grafów X i G, który oznaczany jest w literaturze symbolem $X[G]$.

Niech $G_1 \subseteq G$. *Złączeniem grafów G i H podgrafem G_1* nazywamy graf $G_1(G) + H$ otrzymany z sumy rozłącznej grafów G i H przez połączenie każdego wierzchołka podgrafu G_1 z każdym wierzchołkiem grafu H.

Niech G i H będą grafami rozłącznymi oraz niech $xx' \in E(G)$ i $hh' \in E(H)$ będą dowolnymi krawędziami. *Quasi-stertą* grafów G i H *wiszącą na krawędziach xx' i hh'* nazywamy graf $S(G, H)$ taki, że $V(S(G, H)) = V(G) \cup V(H)$ oraz $E(S(G, H)) = E(G) \cup E(H) \cup \{xh, x'h'\}$.

Wprowadzimy uogólnienie grafu zwanego w literaturze podziałem krawędzi ([18]). Niech $uv \in E(G)$ będzie dowolną krawędzią grafu G. Przez *t-podział krawędzi uv* ($t \geqslant 1$) rozumiemy graf G_t otrzymany z grafu G przez usunięcie krawędzi uv, i dodanie t nowych wierzchołków: $y_1, y_2, ...y_t$ (zwanych *wierzchołkami t-podziału*) wraz z nowymi krawędziami: $uy_1, y_1y_2, y_2y_3, ..., y_tv$. Przez *domknięty t-podział krawędzi uv* ($t \geqslant 1$) rozumiemy graf $\hat{G}_t$ otrzymany z grafu G przez dodanie t nowych wierzchołków: $y_1, y_2, ...y_t$ (zwanych *wierzchołkami domkniętego t-podziału*) wraz z nowymi krawędziami: $uy_1, y_1y_2, y_2y_3, ..., y_tv$.

Niech H będzie dowolnym podgrafem grafu G. Symbol G/H oznacza graf zwany *ściągnięciem podgrafu H grafu G do nowego wierzchołka v_H*. Bardziej formalnie: $V(G/H) = (V(G) - V(H)) \cup \{v_H\}$, gdzie v_H jest "nowym wierzchołkiem", $v_H \notin V(G) \cup E(G)$, oraz $E(G/H) = \{uv \in E(G) : \quad \{u, v\} \cap V(H) = \emptyset\} \cup \{v_Hv : \quad v \in V(G) - V(H)$ oraz istnieje $h \in V(H)$ taki, że $hv \in E(G)\}$. Graf G/K_2 jest oznaczany w literaturze ([7]) symbolem G/e.

Niech $e \in E(G)$ będzie dowolną krawędzią grafu G. Symbol $G - e$ oznacza podgraf grafu G otrzymany przez usunięcie krawędzi e z grafu G. Jeżeli $A \subset V(G)$, to symbol $G - A$ oznacza podgraf grafu G indukowany przez zbiór $V(G) - A$. Jeżeli $A = \{x\}$, to zamiast $G - \{x\}$ będziemy pisać $G - x$.

Niech $x \in V(G)$ będzie dowolnym wierzchołkiem grafu G. *Duplikacją wierzchołka x* ([4]) nazywamy graf G^x taki, że $V(G^x) = V(G) \cup \{x'\}$ oraz $E(G^x) = E(G) \cup \{yx' : \quad y \in N_G(x)\}$. Wierzchołek x' nazywamy kopią wierzchołka x, a wierzchołek x nazywamy oryginałem wierzchołka x'.

Definicje pojęć, które zostały użyte w pracy, ale nie zostały zdefiniowane, znajdują się w [7].

Rozdział 2

Grafy rozszerzalne w sensie Plummera

2.1. Wprowadzenie

Wyniki zawarte w tym rozdziale zostały opublikowane w pracy [23]. Wprost z definicji skojarzenia doskonałego w grafie G jako własność wynika warunek konieczny k-rozszerzalności ($0 \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}|V(G)| - 1$) w sensie Plummera grafu G.

Własność 2.1.1. *Jeżeli graf G jest k-rozszerzalny w sensie Plummera dla $k \geqslant 0$, to $|V(G)|$ jest liczbą parzystą.*

Dlatego też będzie badana rozszerzalność w sensie Plummera takich grafów, które mają parzystą liczbę wierzchołków. Ponieważ w tym rozdziale będzie występował tylko jeden rodzaj rozszerzalności grafów, tzn. rozszerzalność w sensie Plummera, dlatego będę pisać krótko: "graf k-rozszerzalny" zamiast "graf k-rozszerzalny w sensie Plummera". Wprost z definicji grafu k-rozszerzalnego wynika

Własność 2.1.2. *Jeżeli dla pewnego wierzchołka $x \in V(G)$ istnieje skojarzenie M pokrywające wszystkie wierzchołki zbioru $N_G(x)$, to graf G nie jest k-rozszerzalny dla $k = |M|$.*

Powyższe spostrzeżenie będzie często wykorzystywane w dowodach twierdzeń zamieszczonych w tym rozdziale. Następujące rezultaty, które ukazały się w [29], [31], będą również użyteczne w dalszych rozważaniach

Twierdzenie 2.1.1. M. D. Plummer, [29]
Jeżeli G jest grafem k-rozszerzalnym dla $k \geqslant 1$, to G jest grafem $(k-1)$-rozszerzalnym.

Twierdzenie 2.1.2. M. D. Plummer, [29]
Niech G będzie grafem o parzystej liczbie wierzchołków $|V(G)| \geqslant 4$ oraz niech k, m będą liczbami całkowitymi takimi, że $\frac{1}{2}|V(G)| + k \leqslant m \leqslant |V(G)| - 1$. Wówczas każdy graf G, w którym $\delta(G) \geqslant m$ jest k-rozszerzalny.

Twierdzenie 2.1.3. M. D. Plummer, [31]
Dla dowolnej krawędzi $e \in E(G)$ grafu k-rozszerzalnego G $(k \geqslant 1)$, graf $G - e$ jest $(k-1)$-rozszerzalny.

Z Twierdzenia 2.1.1 oraz Twierdzenia 2.1.3 wynika

Wniosek 2.1.1. *Jeżeli G jest grafem k-rozszerzalnym dla $k \geqslant 1$ oraz $e = xy \in E(G)$ jest dowolną krawędzią tego grafu, to $G - \{x, y\}$ jest grafem $(k-1)$-rozszerzalnym.*

Dowód. Niech G będzie grafem k-rozszerzalnym dla $k \geqslant 1$. Przyjmijmy oznaczenia: $G_0 = G - e$ oraz $G_1 = G - \{x, y\}$. Pokażemy, że w grafie G_1 istnieje $k-1$ niezależnych krawędzi. Zauważmy, że Twierdzenie 2.1.1 gwarantuje 1-rozszerzalność grafu G. Możemy zatem rozszerzyć krawędź $e = xy \in E(G)$ do skojarzenia doskonałego M_G w G, tzn., $xy \in M_G$ oraz $|M_G| = \frac{1}{2}|V(G)| \geqslant k+1$. Oczywiście żadna krawędź zbioru M_G (różna od e) nie pokrywa wierzchołka x i wierzchołka y. Zatem $M_G - \{e\} \subseteq E(G_1), |M_G - \{e\}| \geqslant k$ oraz zbiór $M_G - \{e\}$ jest skojarzeniem w grafie G_1. Można więc wybrać ze zbioru $M_G - \{e\}$ $k-1$ niezależnych krawędzi w G_1.
Załóżmy, że A jest dowolnym skojarzeniem mocy $k-1$ w grafie G_1. Co więcej, A jest

skojarzeniem w grafie G_0. Z Twierdzenia 2.1.3 wynika, że graf G_0 jest $(k-1)$-rozszerzalny. Istnieje zatem skojarzenie doskonałe M_{G_0} takie, że $A \subseteq M_{G_0}$ (oczywiście dokładnie jedna krawędź e_x pokrywająca wierzchołek x oraz dokładnie jedna krawędź e_y pokrywająca wierzchołek y należy do zbioru M_{G_0}). Zatem zbiór $M_{G_1} = M_{G_0} - \{e_x, e_y\}$ jest skojarzeniem doskonałym w grafie G_1 oraz $A \subseteq M_{G_1}$. Oznacza to, iż graf $G_1 = G - \{x, y\}$ jest $(k-1)$-rozszerzalny, co należało wykazać.

■

C. H. C. Little, D. D. Grant i D. A. Holton w 1975 roku ([25]) udowodnili warunek konieczny i wystarczający na to aby graf G był grafem 1-rozszerzalnym. Warunek ten jest sformułowany w terminach liczby nieparzystych komponent spójności grafu $G-S$, gdzie S jest dowolnym podzbiorem zbioru $V(G)$. Z definicji grafu 1-rozszerzalnego oraz z Twierdzenia 2.1.1 otrzymujemy warunek konieczny k-rozszerzalności grafu dla $k \geqslant 1$.

Twierdzenie 2.1.4. *Jeżeli graf G jest k-rozszerzalny dla $k \geqslant 1$, to $|V(G)| \geqslant 4$ oraz $\delta(G) \geqslant 2$.*

Dowód. Niech G będzie grafem k-rozszerzalnym dla $k \geqslant 1$. Wtedy graf G jest 1-rozszerzalny, co wynika z Twierdzenia 2.1.1. Z definicji k-rozszerzalności grafu G wiemy, że prawdziwa jest nierówność $0 \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}|V(G)| - 1$, czyli $|V(G)| \geqslant 4$ dla $k = 1$. Przypuśćmy, że $\delta(G) < 2$. Wykażemy, że graf G nie jest grafem k-rozszerzalnym. Wówczas w grafie G istnieje wierzchołek stopnia 0 lub stopnia 1. Istnienie wierzchołka izolowanego byłoby sprzeczne ze spójnością grafu G. Jeśli w grafie G istnieje wierzchołek wiszący $x \in V(G)$, to $N_G(x) = \{x'\}$. Ponieważ $|V(G)| \geqslant 4$, to ze spójności grafu G wynika, że istnieje w grafie G krawędź $x'x'' \neq xx'$, gdzie $x'' \in V(G)$. Zauważmy, że krawędzi $x'x''$ nie da się rozszerzyć do skojarzenia doskonałego w grafie G (wierzchołek x nie ma sąsiadów w podgrafie $G - \{x', x''\}$), co oznacza, że graf G nie jest grafem 1-rozszerzalnym, a z Twierdzenia 2.1.1 wynika, że G nie jest grafem k-rozszerzalnym dla $k \geqslant 1$.

■

Powyższy warunek nie wystarczy aby graf G był k-rozszerzalny dla każdego $k \geqslant 1$. Wystarczy rozważyć cykl parzysty C_{2n} dla $n \geqslant 2$. Wtedy $|V(C_{2n})| \geqslant 4$ oraz $\delta(C_{2n}) = 2$, ale cykl C_{2n} nie jest grafem k-rozszerzalnym dla żadnego $k \geqslant 2$ (Przykład 2.1.1).

Przypomnę, że $ext(G) \stackrel{def}{=} \max\{k\colon \quad G$ jest k-rozszerzalny$\}$ (str. 10). Korzystając z Twierdzenia 2.1.1 nietrudno wnioskować, że

Wniosek 2.1.2. *$ext(G) = k$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba całkowita $k \geqslant 0$, że graf G jest k-rozszerzalny i nie jest $(k+1)$-rozszerzalny.*

Wniosek 2.1.2 posłuży między innymi do wyznaczania indeksu rozszerzalności grafów takich jak: cykl, droga, graf pełny, graf pełny dwudzielny.

Przykład 2.1.1. $ext(C_{2n}) = 1$, dla $n \geqslant 2$.

Jest oczywiste, że cykl C_{2n} $(n \geqslant 2)$ jest grafem 1-rozszerzalnym, gdyż biorąc dowolną jego krawędź $x_i x_{i+1}$ i dołączając do niej $n-1$ krawędzi $x_{i+2l}x_{i+2l+1}$ dla $l = 1, 2, ..., n-1$ (oczywiście $x_{i+2n} = x_i$) uzyskamy skojarzenie doskonałe. Zauważmy, że cykl C_4 nie może być k-rozszerzalny dla $k \geqslant 2$, ponieważ warunek $0 \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}|V(G)| - 1$ nie jest spełniony dla $G = C_4$. Jeśli $n > 2$, to w grafie C_{2n} dla dowolnego wierzchołka $x_i \in V(C_{2n})$ $(i \in \{1, 2, ..., 2n\})$ istnieje skojarzenie $M_i = \{x_{i-2}x_{i-1}, x_{i+1}x_{i+2}\}$ (oczywiście $x_{j+2n} = x_j$ dla $1 \leqslant j \leqslant 2n$) pokrywające wszystkie wierzchołki zbioru $N_{C_{2n}}(x_i)$. Ponieważ $|M_i| = 2$, to na mocy Własności 2.1.2 graf C_{2n} nie jest grafem 2-rozszerzalnym. Zatem indeks rozszerzalności cyklu C_{2n} wynosi jeden, na podstawie Wniosku 2.1.2.

Przykład 2.1.2. $ext(P_{2n}) = 0$, dla $n \geqslant 1$.

Oczywiste jest, że każda droga P_{2n} $(n \geqslant 1)$ zawiera skojarzenie doskonałe (jest 0-rozszerzalna). Można bowiem wziąć pierwszą krawędź drogi P_{2n}, a następnie co drugą jej krawędź i uzyskamy skojarzenie pokrywające wszystkie wierzchołki tego grafu. Ponieważ $\delta(P_{2n}) = 1 < 2$, to z Twierdzenia 2.1.4 wynika, że droga P_{2n} nie jest grafem k-rozszerzalnym dla $k \geqslant 1$. Zatem indeks rozszerzalności drogi P_{2n} jest równy zero.

Przykład 2.1.3. $ext(K_{2n}) = n - 1$, dla $n \geqslant 1$.

Zauważmy, że $ext(K_2) = 0$. Jeżeli $n \geqslant 2$, to $|V(K_{2n})| \geqslant 4$ oraz $\delta(K_{2n}) = 2n - 1$. Z Twierdzenia 2.1.2 dla $m = 2n - 1$ wynika k-rozszerzalność grafu K_{2n} dla $k = n - 1$. Z definicji k-rozszerzalności wiemy, że $k \leqslant \frac{1}{2}|V(K_{2n})| - 1 = n - 1$. Zatem $ext(K_{2n})$ wynosi $n - 1$.

Przykład 2.1.4. $ext(K_{n,n}) = n - 1$, dla $n \geqslant 1$.

Z definicji grafu pełnego dwudzielnego wynika, że każda krawędź grafu $K_{n,n}$ pokrywa jeden wierzchołek zbioru V_1 i jeden zbioru V_2, gdzie $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ oraz $V_1 \cup V_2 = V(K_{n,n})$. Zatem dowolne skojarzenie M w grafie $K_{n,n}$, które zawiera $n-1$ krawędzi pokrywa $n-1$ wierzchołków zbioru V_1 i $n-1$ wierzchołków zbioru V_2. Ponieważ $|V_1| = |V_2| = n$, to dwa wierzchołki, które nie są pokryte przez skojarzenie M, nie mogą należeć jednocześnie do tego samego zbioru V_i dla $1 \leqslant i \leqslant 2$, czyli muszą być sąsiednie w grafie $K_{n,n}$. Zatem skojarzenie M można rozszerzyć do skojarzenia doskonałego w grafie $K_{n,n}$ dodając jedną krawędź do zbioru M. Z definicji k-rozszerzalności wiemy, że $k \leqslant \frac{1}{2}|V(K_{n,n})| - 1 = n - 1$. Zatem $ext(K_{n,n}) = n - 1$.

2.2. Produkty grafów rozszerzalnych

E. Györi oraz M. D. Plummer w pracy [15] udowodnili

Twierdzenie 2.2.1. (E. Györi, M. D. Plummer [15])
Jeżeli G_1 jest grafem k-rozszerzalnym oraz G_2 jest grafem l-rozszerzalnym, to ich produkt kartezjański $G_1 \times G_2$ jest $(k+l+1)$-rozszerzalny.

Co więcej, autorzy wykazali, że rezultat ten jest najlepszy z możliwych dla pewnych klas grafów, tzn. $ext(Q_n) = n - 1$, $ext(Q_{k+l+2}) = ext(Q_{k+1} \times Q_{l+1}) = k + l + 1$ oraz $ext(Q_{k+2}) = ext(Q_{k+1} \times K_2) = k + 1$, gdzie Q_n oznacza n-wymiarową kostkę o 2^n wierzchołkach i $n2^{n-1}$ krawędziach, który jest produktem kartezjańskim grafów Q_{k+1} i Q_{l+1} dla $n = k + l + 2$. Natomiast w pracy [14] E. Györi oraz W. Imrich udowodnili następujące twierdzenia

Twierdzenie 2.2.2. (E. Györi, W. Imrich [14])
Jeżeli G_1 jest grafem k-rozszerzalnym oraz G_2 jest grafem l-rozszerzalnym $(k, l \geqslant 0)$, to ich silny produkt $G_1 \otimes G_2$ jest $\left[\frac{(k+1)(l+1)}{2}\right]$-rozszerzalny.

Twierdzenie 2.2.3. (E. Györi, W. Imrich [14])
Jeżeli G jest grafem k-rozszerzalnym, to $G \otimes K_2$ jest grafem $(k+1)$-rozszerzalnym.

W oparciu o te wyniki można wyznaczyć indeksy rozszerzalności produktu kartezjańskiego i silnego produktu dwóch grafów należących do znanych w literaturze klas.

Wniosek 2.2.1. *Niech m, n będą liczbami naturalnymi parzystymi. Wówczas $ext(P_m \times P_n) = 1$, jeżeli $m, n \geqslant 2$, $\quad ext(P_m \times C_n) = 2$, jeżeli $m \geqslant 2, n \geqslant 4$ oraz $ext(C_m \times C_n) = 3$, jeżeli $m, n \geqslant 4$.*

Dowód. Z Przykładu 2.1.1 i Przykładu 2.1.2 (str. 17) oraz z zacytowanego na wstępie tej części Rozdziału 2 Twierdzenia 2.2.1 wynika, że dla liczb naturalnych parzystych m, n graf $P_m \times P_n$ jest 1-rozszerzalny, jeżeli $m, n \geqslant 2$, graf $P_m \times C_n$ jest 2-rozszerzalny, jeżeli $m \geqslant 2, n \geqslant 4$, a graf $C_m \times C_n$ jest 3-rozszerzalny, jeżeli $m, n \geqslant 4$. Łatwo sprawdzić, że $ext(P_2 \times P_2) = ext(C_4) = 1$, $ext(P_2 \times C_4) = 2$ oraz $ext(C_4 \times C_4) = 3$.

Rozważmy najpierw graf $P_m \times P_n$ dla $m > 2$ lub $n > 2$. Bez straty ogólności załóżmy, że $n > 2$. Wtedy w grafie $P_m \times P_n$ dla wierzchołka $u = (x_1, y_1) \in V(P_m \times P_n)$ istnieje skojarzenie $M_1 = \{(x_2, y_1)(x_2, y_2), (x_1, y_2)(x_1, y_3)\}$ pokrywające wszystkie wierzchołki zbioru $N_{P_m \times P_n}(u)$. Ponieważ $|M_1| = 2$, to $P_m \times P_n$ nie jest grafem 2-rozszerzalnym, na mocy Własności 2.1.2 (str. 15). Zatem z Wniosku 2.1.2 (str. 17) wynika, że $ext(P_m \times P_n) = 1$.

Rozważmy teraz graf $P_m \times C_n$ dla $m > 2$ lub $n > 4$. Zauważmy, że dla $m > 2$ lub $n > 4$ w grafie $P_m \times C_n$ dla wierzchołka $v = (x_1, y_1) \in V(P_m \times C_n)$ istnieje skojarzenie $M_2 = M_1 \cup \{(x_1, y_n)(x_2, y_n)\}$ pokrywające wszystkie wierzchołki zbioru $N_{P_m \times C_n}(v)$. Ponieważ $|M_2| = 3$, to, na mocy Własności 2.1.2 (str. 15), $P_m \times C_n$ nie jest grafem 3-rozszerzalnym, więc $ext(P_m \times C_n) = 2$, zgodnie z Wnioskiem 2.1.2.

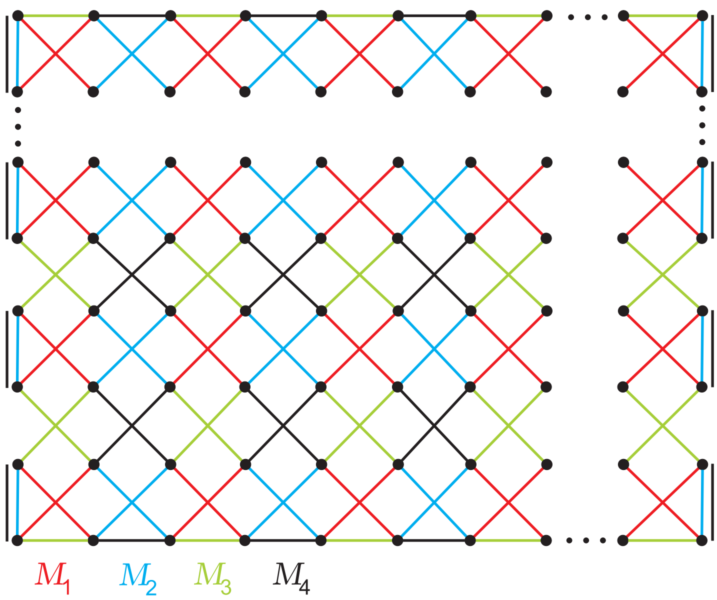
Rozważmy na koniec graf $C_m \times C_n$ dla $m > 4$ lub $n > 4$. Bez straty ogólności załóżmy, że $n > 4$. Wtedy w grafie $C_m \times C_n$ dla wierzchołka $w = (x_1, y_1) \in V(C_m \times C_n)$ istnieje skojarzenie $M_3 = M_2 \cup \{(x_m, y_1)(x_m, y_2)\}$ pokrywające wszystkich jego sąsiadów w grafie $C_m \times C_n$. Ponieważ $|M_3| = 4$, to z Własności 2.1.2 i Wniosku 2.1.2 otrzymujemy $ext(C_m \times C_n) = 3$, co kończy dowód.

■

Wniosek 2.2.2. *Niech m, n będą liczbami naturalnymi parzystymi. Wówczas $ext(P_m \otimes P_n) = 1$, jeżeli $m, n \geqslant 2$ oraz $ext(P_m \otimes C_n) = 2$, jeżeli $m \geqslant 2, n \geqslant 4$.*

Dowód. Z Przykładu 2.1.2 i Przykładu 2.1.1 (str. 17) oraz z zacytowanego na wstępie tej części Rozdziału 2 Twierdzenia 2.2.2 i Twierdzenia 2.2.3 wynika, że dla liczb naturalnych parzystych m, n graf $P_m \otimes P_n$ jest 0-rozszerzalny, jeżeli $m, n \geqslant 2$, graf $P_m \otimes C_n$ jest 1-rozszerzalny, jeżeli $m \geqslant 2, n \geqslant 4$. Łatwo sprawdzić, że $ext(P_2 \otimes P_2) = ext(K_4) = 1$ oraz $ext(P_2 \otimes C_4) = 2$.

Rozważmy graf $P_m \otimes P_n$ dla $m > 2$ lub $n > 2$. Bez straty ogólności niech $n > 2$. Pokażemy najpierw, że $P_m \otimes P_n$ jest grafem 1-rozszerzalnym. Niech $e \in E(P_m \otimes P_n)$ będzie dowolną krawędzią grafu $P_m \otimes P_n$. Jeżeli $e \in E(P_m \otimes P_n) \cap E(P_m \times P_n)$, to e jest krawędzią grafu $P_m \times P_n$. Wtedy z Wniosku 2.2.1 wynika, że $P_m \times P_n$ jest grafem 1-rozszerzalnym, więc krawędź e należy do pewnego skojarzenia doskonałego w grafie $P_m \times P_n$. Ponieważ $P_m \times P_n$ jest podgrafem grafu $P_m \otimes P_n$, w którym $V(P_m \times P_n) = V(P_m \otimes P_n)$ oraz $E(P_m \times P_n) \subset E(P_m \otimes P_n)$, to skojarzenie doskonałe w grafie $P_m \times P_n$ jest również skojarzeniem doskonałym w grafie $P_m \otimes P_n$. Fakt ten dowodzi, że krawędź e należy do skojarzenia doskonałego w grafie $P_m \otimes P_n$. Jeżeli $e \notin E(P_m \otimes P_n) \cap E(P_m \times P_n)$, to e jest krawędzią "skośną" grafu $P_m \otimes P_n$. Zauważmy, że zbiory M_1, M_2, M_3, M_4 oznaczone na Rysunku 2.1 odpowiednio kolorami: czerwonym, niebieskim, zielonym, czarnym są skojarzeniami doskonałymi w grafie $P_m \otimes P_n$. Ponadto, $E(P_m \otimes P_n) - E(P_m \times P_n) \subset M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$. Zatem istnieje skojarzenie doskonałe M_i dla $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ zawierające krawędź e, tzn. graf $P_m \otimes P_n$ jest 1-rozszerzalny.



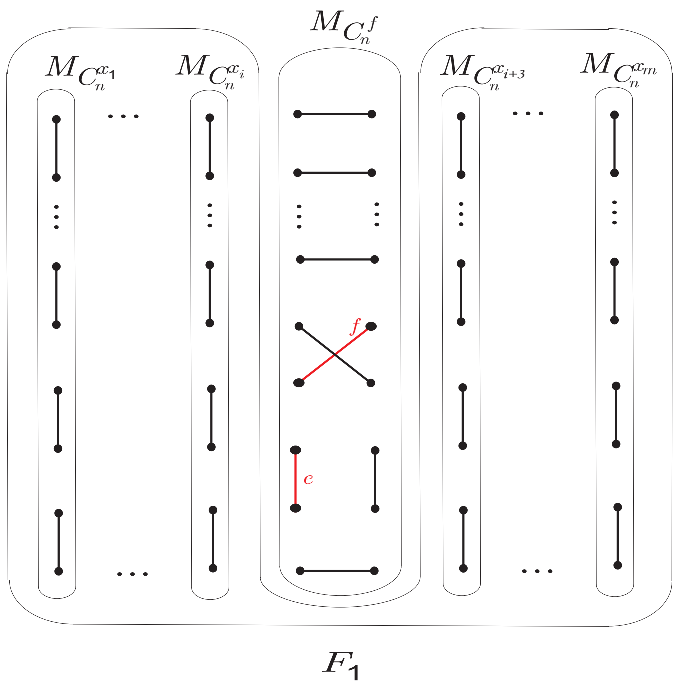
Rysunek 2.1. Skojarzenia doskonałe M_1, M_2, M_3, M_4 w grafie $P_m \otimes P_n$.

Następnie, analogicznie jak w dowodzie Wniosku 2.2.1, można wykazać, że graf $P_m \otimes P_n$ nie jest grafem 2-rozszerzalnym, więc $ext(P_m \otimes P_n) = 1$.

Rozważmy graf $P_m \otimes C_n$ dla $m > 2$ lub $n > 4$. Pokażemy najpierw, że $P_m \otimes C_n$ jest grafem 2-rozszerzalnym. Niech $\{e, f\} \subset E(P_m \otimes C_n)$ będzie dowolnym skojarzeniem w grafie $P_m \otimes C_n$. Jeżeli $\{e, f\} \subset E(P_m \otimes C_n) \cap E(P_m \times C_n)$, to $\{e, f\} \subset E(P_m \times C_n)$. Wtedy z Wniosku 2.2.1 wynika, że $P_m \times C_n$ jest grafem 2-rozszerzalnym, więc zbiór $\{e, f\}$ zawiera się w pewnym skojarzeniu doskonałym w grafie $P_m \times C_n$. Analogicznie jak w przypadku grafu $P_m \otimes P_n$ wnioskujemy, że jest to skojarzenie doskonałe w grafie $P_m \otimes C_n$. Jeżeli $\{e, f\}$ nie zawiera się w zbiorze $E(P_m \otimes C_n) \cap E(P_m \times C_n)$, to $|\{e, f\} \cap E(P_m \times C_n)| = 1$ lub $\{e, f\} \cap E(P_m \times C_n) = \emptyset$. Symbolem P_m^f oraz C_n^f oznaczać będziemy podgraf indukowany grafu $P_m \otimes C_n$ izomorficzny odpowiednio z grafem $P_m \otimes K_2$ oraz $K_2 \otimes C_n$ zawierającym krawędź f. W analogiczny sposób definiujemy podgrafy P_m^e oraz C_n^e. Symbolem $C_n^{x_i}$ będziemy oznaczać podgraf grafu $P_m \otimes C_n$ indukowany przez zbiór $\{x_i\} \times V(C_n)$ dla $x_i \in V(P_m)$, izomorficzny z cyklem C_n. Rozpatrzymy dwa przypadki.

Przypadek 1. $|\{e, f\} \cap E(P_m \times C_n)| = 1$. Bez straty ogólności załóżmy, że $e \in E(P_m \times C_n)$ oraz $f \notin E(P_m \times C_n)$.

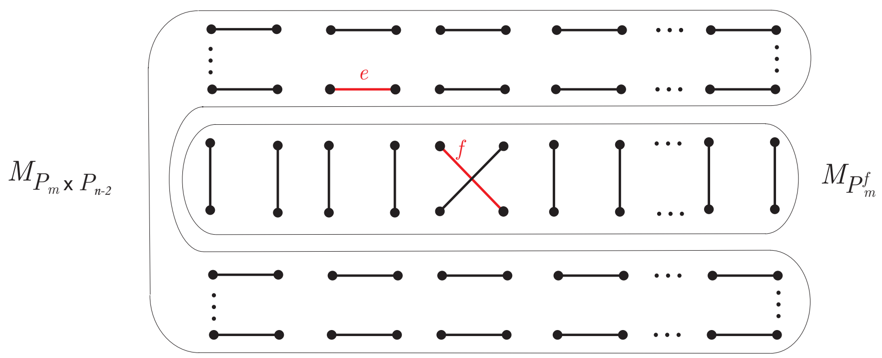
Niech $e \in E(C_n^f)$ $(e \in E(P_m \times C_n))$. Wówczas $\{e, f\} \subset E(C_n^f)$.



Rysunek 2.2. Skojarzenie doskonałe $M_{C_n^f} \cup F_1$ w grafie $P_m \otimes C_n$ zawierające zbiór $\{e, f\}$.

Z Przykładu 2.1.1 (str. 17) oraz z Twierdzenia 2.2.3 wynika, że C_n^f jest grafem 2-rozszerzalnym. Zatem istnieje skojarzenie doskonałe $M_{C_n^f}$ w podgrafie C_n^f zawierające zbiór $\{e, f\}$. Jeżeli $m = 2$, to $C_n^f = P_m \otimes C_n$, więc $M_{C_n^f}$ jest skojarzeniem doskonałym w grafie $P_m \otimes C_n$ zawierającym zbiór $\{e, f\}$. Jeżeli $m > 2$, to zauważmy, że każdy graf $C_n^{x_i}$ dla $i \in \{1, 2, ..., m\}$ takiego, że $V(C_n^{x_i}) \cap V(C_n^f) = \emptyset$ zawiera skojarzenie doskonałe $M_{C_n^{x_i}}$ ($C_n^{x_i} \cong C_n$). Zatem graf $P_m \otimes C_n - V(C_n^f)$ zawiera skojarzenie doskonałe F_1 będące sumą rozłączną $m - 2$ skojarzeń $M_{C_n^{x_i}}$ (patrz Rysunek 2.2). Oznacza to, że istnieje skojarzenie doskonałe $M_{C_n^f} \cup F_1$ w grafie $P_m \otimes C_n$ zawierające zbiór $\{e, f\}$.

Niech $e \notin E(C_n^f)$ ($e \in E(P_m \times C_n)$). Wówczas, $m > 2$. Załóżmy, że e jest krawędzią postaci $(x_j, y_p)(x_{j+1}, y_p)$, gdzie $x_j x_{j+1} \in E(P_m)$ oraz $y_p \in V(C_n)$. Wówczas w zbiorze $V(P_m^f)$ nie ma wierzchołków pokrytych krawędzią e (gdyby tak nie było, to $e \in E(P_m^f)$). Ponieważ $P_m^f \cong P_m \otimes K_2$, to z Przykładu 2.1.2 (str. 17) oraz z Twierdzenia 2.2.3 wynika, że P_m^f jest grafem 1-rozszerzalnym. Zatem w podgrafie P_m^f można wybrać skojarzenie doskonałe $M_{P_m^f}$ rozszerzające krawędź f. Natomiast w podgrafie $P_m \times C_n - V(P_m^f) \cong P_m \times P_{n-2}$ ($ext(P_m \times P_{n-2}) = 1$, Wniosek 2.2.1) można wybrać skojarzenie doskonałe $M_{P_m \times P_{n-2}}$ zawierające krawędź e (patrz Rysunek 2.3). Ponieważ $P_m \times C_n - V(P_m^f) \subseteq P_m \otimes C_n - V(P_m^f)$, przy czym $V(P_m \times C_n - V(P_m^f)) = V(P_m \otimes C_n - V(P_m^f))$ oraz $E(P_m \times C_n - V(P_m^f)) \subset E(P_m \otimes C_n - V(P_m^f))$, dlatego zbiór $M_{P_m \times P_{n-2}}$ jest skojarzeniem doskonałym również w grafie $P_m \otimes C_n - V(P_m^f)$. Oznacza to, że $\{e, f\} \subset M_{P_m \times P_{n-2}} \cup M_{P_m^f}$ oraz $M_{P_m \times P_{n-2}} \cup M_{P_m^f}$ jest skojarzeniem doskonałym w grafie $P_m \times C_n$.



Rysunek 2.3. Skojarzenie doskonałe $M_{P_m \times P_{n-2}} \cup M_{P_m^f}$ w grafie $P_m \otimes C_n$ zawierające zbiór $\{e, f\}$.

Załóżmy teraz, że e jest krawędzią postaci $(x_k, y_q)(x_k, y_r)$, gdzie $x_k \in V(P_m)$ oraz $y_q y_r \in E(C_n)$. Wówczas w zbiorze $V(C_n^f)$ nie ma wierzchołków pokrytych krawędzią e (gdyby tak nie było, to $e \in E(C_n^f)$). Ponieważ $C_n^f \cong K_2 \otimes C_n$, to C_n^f jest grafem 2-rozszerzalnym, na podstawie Przykładu 2.1.1 (str. 17) oraz Twierdzenia 2.2.3. Co więcej, C_n^f jest grafem 1-rozszerzalnym, na podstawie Twierdzenia 2.1.1 (str. 15). Zatem w podgrafie C_n^f można wybrać skojarzenie doskonałe $M_{C_n^f}$ rozszerzające krawędź f. Ponieważ $ext(C_n) = 1$ (Przykład 2.1.1, str. 17), to w grafie C_n istnieje skojarzenie doskonałe zawierające krawędź $y_q y_r$. Skoro $C_n^{x_k} \cong C_n$, to w grafie $C_n^{x_k}$ istnieje skojarzenie doskonałe $M_{C_n^{x_k}}$ zawierające krawędź e. Dodatkowo, każdy graf $C_n^{x_l}$ dla $l \in \{1, 2, ..., m\} - \{k\}$ takiego, że $V(C_n^{x_l}) \cap V(C_n^f)$ zawiera skojarzenie doskonałe $M_{C_n^{x_l}}$. Zatem w grafie $P_m \otimes C_n - V(C_n^f)$ można wybrać skojarzenie doskonałe F_2 będące sumą rozłączną $m-3$ skojarzeń $M_{C_n^{x_l}}$ oraz skojarzenia $M_{C_n^f}$. Oznacza to, że istnieje skojarzenie doskonałe $M_{C_n^f} \cup F_2$ w grafie $P_m \otimes C_n$ zawierające zbiór $\{e, f\}$.

Przypadek 2. $\{e, f\} \cap E(P_m \times C_n) = \emptyset$. Wówczas $e, f \in E(P_m \otimes C_n) - E(P_m \times C_n)$. Jeżeli $e \in E(C_n^f)$ $(e \notin E(P_m \times C_n))$, to używając tych samych argumentów co w Przypadku 1 otrzymamy rozszerzenie skojarzenia $\{e, f\}$ do skojarzenia doskonałego w grafie $P_m \otimes C_n$. Jeżeli $e \notin E(C_n^f)$ oraz $V(C_n^e) \cap V(C_n^f) = \emptyset$, to dwukrotnie powołując się na Twierdzenie 2.2.3 otrzymamy, jak w Przypadku 1, skojarzenie doskonałe w grafie $P_m \otimes C_n$ zawierające krawędzie e, f. Jeżeli $e \notin E(C_n^f)$ oraz $V(C_n^e) \cap V(C_n^f) \neq \emptyset$, to $\{e, f\} \subset E(C_n^e) \cup E(C_n^f)$, przy czym $C_n^e \cup C_n^f \cong P_3 \otimes C_n$. Nietrudno sprawdzić, że dowolne dwie niezależne krawędzie należące do zbioru $E(P_3 \otimes C_n) - E(P_3 \times C_n)$ można rozszerzyć do skojarzenia doskonałego w tym grafie. Niech zatem $M_{P_3 \otimes C_n}$ będzie skojarzeniem doskonałym w grafie $P_3 \otimes C_n$ takim, że $e, f \in M_{P_3 \otimes C_n}$. Zatem w grafie $P_m \otimes C_n - V(P_3 \otimes C_n)$ istnieje skojarzenie doskonałe F_3 będące sumą rozłączną $m-3$ skojarzeń $M_{C_n^{x_i}}$ dla $i \in \{1, 2, ..., m\}$ takiego, że $V(C_n^{x_i}) \cap (V(C_n^e) \cup V(C_n^f)) = \emptyset$, analogicznie jak w Przypadku 1. Oznacza to, że skojarzenie doskonałe $M_{P_3 \otimes C_n} \cup F_3$ w grafie $P_m \otimes C_n$ zawierające zbiór $\{e, f\}$.

Ostatecznie graf $P_m \otimes C_n$ jest grafem 2-rozszerzalnym. Następnie, analogicznie jak w dowodzie Wniosku 2.2.1, można wykazać, że graf $P_m \otimes C_n$ nie jest grafem 3-rozszerzalnym, więc $ext(P_m \otimes C_n) = 2$, co kończy dowód.

■

Kolejnym produktem grafów G i H rozważanym w tym rozdziale jest korona $G \circ H$ zdefiniowana na stronie 12.

Twierdzenie 2.2.4. *Jeżeli G jest grafem k-rozszerzalnym i H jest grafem l-rozszerzalnym $(k, l \geqslant 0)$, to $ext(G \circ H) = 0$.*

Dowód. Niech $H_1, H_2, ..., H_n$ będą kopiami rozłącznymi grafu H oraz niech H_i będzie grafem l-rozszerzalnym dla $i = 1, 2, ..., n = |V(G)|$ i niech G będzie grafem

k-rozszerzalnym ($k, l \geqslant 0$). Oznacza to, że H_i oraz G zawierają skojarzenia doskonałe M_{H_i}, dla każdego $i = 1, 2, ..., n$ oraz M_G. Zauważmy, że zbiór $M_{G \circ H} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} M_{H_i} \cup M_G$ jest skojarzeniem doskonałym w koronie $G \circ H$. Innymi słowy, $G \circ H$ jest grafem 0-rozszerzalnym.
Zauważmy dodatkowo, że istnieje krawędź $h_1 x_1 \in E(G \circ H)$, gdzie $h_1 \in V(H_1)$ oraz $x_1 \in V(G)$, której nie można rozszerzyć do skojarzenia doskonałego w grafie $G \circ H$ ponieważ liczba $|V(H_1) - \{h_1\}|$ jest nieparzysta. Ostatecznie, $ext(G \circ H) = 0$.

■

Udowodnimy kilka rezultatów dotyczących rozszerzalności grafu $G + H$ zwanego w literaturze złączeniem dwóch grafów G i H. W Rozdziale 1 odnotowałam, że złączenie n grafów $G_1, G_2, ..., G_n$ dla $n \geqslant 2$ jest szczególnym przypadkiem grafu $X[G_1, G_2, ..., G_n]$, tzn. graf $G + H$ powstaje z sumy rozłącznej grafów G i H przez dodanie do niej wszystkich możliwych krawędzi łączących wierzchołki zbioru $V(G)$ z wierzchołkami zbioru $V(H)$.

Twierdzenie 2.2.5. *Jeżeli graf G jest k-rozszerzalny dla $k \geqslant 1$ oraz r jest liczbą parzystą ($r \geqslant 2$), to $G + K_r$ jest grafem 1-rozszerzalnym.*

Dowód. Niech G będzie grafem k-rozszerzalnym oraz niech e będzie dowolną krawędzią grafu $G + K_r$. Rozważmy dwa przypadki w zależności od położenia krawędzi e.

Przypadek 1. $e \in E(G) \cup E(K_r)$. Jeśli $e \in E(G)$, to z k-rozszerzalności grafu G, oraz z Twierdzenia 2.1.1 (str. 15) wynika, że można utworzyć skojarzenie doskonałe M_G w grafie G zawierające krawędź e. Jeżeli M_{K_r} jest dowolnym skojarzeniem doskonałym w grafie K_r, to zbiór $M_{K_r} \cup M_G$ jest skojarzeniem doskonałym w $G + K_r$ stanowiącym rozszerzenie krawędzi e. Jeśli $e \in E(K_r)$, to dowód jest analogiczny, wystarczy zamienić rolami G z K_r.

Przypadek 2. $e \in E(G + K_r) - (E(G) \cup E(K_r))$. Oznaczmy, $e = x_i y_j$, gdzie $x_i \in V(G)$ oraz $y_j \in V(K_r)$. Z k-rozszerzalności grafu G otrzymujemy, że istnieje krawędź $x_i x_s \in E(G)$ dla $x_s \neq x_i$, którą można rozszerzyć do skojarzenia doskonałego M_G w G. Co więcej, można wybrać skojarzenie doskonałe M_{K_r} w K_r, zawierające krawędź $y_j y_t$. Jeżeli M_G jest skojarzeniem doskonałym w G, to podzbiór krawędzi $(M_G - \{x_i x_s\}) \cup (M_{K_r} - \{y_j y_t\}) \cup \{x_i y_j, x_s y_t\}$ jest skojarzeniem doskonałym w $G + K_r$ zawierającym $e = x_i y_j$, co kończy dowód.

■

Jeżeli w powyższym twierdzeniu graf G jest izomorficzny z grafem pełnym K_n, to graf $G + K_r$ jest izomorficzny z grafem pełnym K_{n+r}. Wykorzystując Przykład 2.1.3 (str. 17) można zatem obliczyć indeks rozszerzalności grafu $K_n + K_r$

Obserwacja 2.2.1. *Niech n, r będą liczbami parzystymi. Wtedy* $ext(K_n + K_r) = ext(K_{n+r}) = \frac{n+r}{2} - 1$.

Twierdzenie 2.2.6. *Niech $k \geqslant 1$ oraz $n \geqslant 4$. Jeżeli p jest liczbą parzystą taką, że $2 \leqslant p \leqslant n-2$ oraz $\overline{K_p}$ jest grafem bezkrawędziowym o p wierzchołkach, a G jest grafem k-rozszerzalnym o n wierzchołkach, to $G + \overline{K_p}$ jest grafem 1-rozszerzalnym.*

Dowód. Niech G będzie grafem k-rozszerzalnym. Pokażemy, że dowolna krawędź $e_0 \in E(G + \overline{K_p})$ należy do pewnego skojarzenia doskonałego w $G + \overline{K_p}$. Mamy dwa przypadki do rozpatrzenia.

Przypadek 1. $e_0 \in E(G)$. Z Twierdzenia 2.1.1 (str. 15) wynika, że k-rozszerzalność grafu G implikuje 1-rozszerzalność grafu G. Zatem istnieje skojarzenie doskonałe M_G w G takie, że $e_0 \in M_G$ oraz $|M_G - \{e_0\}| = \frac{n}{2} - 1 \geqslant \frac{p}{2}$. Niech $M_G = \{e_0, ..., e_{\frac{p}{2}}, e_{\frac{p}{2}+1}, ..., e_{\frac{n}{2}-1}\}$, $\{y_1, y_2, ..., y_p\} = V(\overline{K_p})$ oraz niech $x_i, x_i' \in V(G)$ będą wierzchołkami końcowymi krawędzi e_i dla każdego $i = 1, 2, ..., \frac{p}{2}$. Zbiór $F \subseteq E(G + \overline{K_p})$, gdzie $F = \{x_1y_1, x_1'y_2, ..., x_{\frac{p}{2}}y_{p-1}, x'_{\frac{p}{2}}y_p\}$ jest skojarzeniem w grafie $G + \overline{K_p}$. Zauważmy, że jeżeli $\frac{n}{2} - 1 = \frac{p}{2}$, to zbiór $F \cup \{e_0\}$ jest skojarzeniem doskonałym w grafie $G + \overline{K_p}$ zawierającym krawędź e_0. Jeżeli $\frac{n}{2} - 1 > \frac{p}{2}$, to zbiór $F \cup \{e_0, e_{\frac{p}{2}+1}, ..., e_{\frac{n}{2}-1}\}$ jest skojarzeniem doskonałym w $G + \overline{K_p}$ zawierającym krawędź e_0.

Przypadek 2. $e_0 \in E(G + \overline{K_p}) - E(G)$. Niech $e_0 = xy$, gdzie $x \in V(G)$ i $y \in V(\overline{K_p})$. Z Twierdzenia 2.1.1 (str. 15) wynika, że k-rozszerzalność grafu G gwarantuje istnienie krawędzi $xz \in E(G)$ takiej, że xz należy do skojarzenia doskonałego M_G w G, przy czym $M_G = \{xz, e_1, ..., e_{\frac{n}{2}-1}\}$. Oczywiście, $|M_G - \{xz\}| = \frac{n}{2} - 1 \geqslant \frac{p}{2}$, więc zbiór $M_G - \{xz, e_1, e_2, ..., e_{\frac{p}{2}-1}\} = \{e_{\frac{p}{2}}, e_{\frac{p}{2}+1}, ..., e_{\frac{n}{2}-1}\} \neq \emptyset$. Niech $\{y, y_2, ..., y_p\} = V(\overline{K_p})$ i niech $x_i, x_i' \in V(G)$ będą wierzchołkami końcowymi krawędzi e_i dla każdego $i = 1, 2, ..., \frac{p}{2} - 1$. Możemy więc wybrać skojarzenie doskonałe w $G + \overline{K_p}$ postaci $\{xy, zy_2, x_1y_3, x_1'y_4, x_2y_5, x_2'y_6, ..., x_{\frac{p}{2}-1}y_{p-1}, x'_{\frac{p}{2}-1}y_p, e_{\frac{p}{2}}, e_{\frac{p}{2}+1}, ..., e_{\frac{n}{2}-1}\}$ będące rozszerzeniem krawędzi $e_0 = xy$, co należało udowodnić.

■

Obserwacja 2.2.2. *Jeżeli $n \geqslant 4$ oraz $2 \leqslant p \leqslant n - 2$, to* $ext(K_n + \overline{K_p}) = \frac{n-p}{2}$.

Dowód. Nietrudno zauważyć, że każde skojarzenie doskonałe w grafie $K_n + \overline{K_p}$ zawiera dokładnie p krawędzi, których jeden wierzchołek końcowy należy do zbioru $V(K_n)$ a drugi do zbioru $V(\overline{K_p})$. Oczywiście, pozostałych $n-p$ wierzchołków złączenia $K_n + \overline{K_p}$ (nie pokrytych tymi krawędziami) można pokryć $\frac{n-p}{2}$ niezależnymi krawędziami grafu K_n. Stąd wniosek, iż każde skojarzenie w grafie $K_n + \overline{K_p}$ mocy $\frac{n-p}{2}$ można rozszerzyć do skojarzenia doskonałego w $K_n + \overline{K_p}$. Jednakże, skojarzenie M w grafie $K_n + \overline{K_p}$, które składa się z $\frac{n-p}{2}+1$ krawędzi zbioru $E(K_n)$, nie może zostać rozszerzone do skojarzenia doskonałego w grafie $K_n + \overline{K_p}$. Zauważmy bowiem, że skojarzenie M zawarte w zbiorze $E(K_n)$ pokrywa $n-p+2$ wierzchołków grafu K_n oraz nie pokrywa żadnego wierzchołka grafu $\overline{K_p}$. Pozostaje więc do pokrycia $p-2$ wierzchołków grafu K_n oraz p wierzchołków grafu $\overline{K_p}$. Ponieważ $\overline{K_p}$ jest grafem bezkrawędziowym, to z definicji grafu $K_n + \overline{K_p}$ wynika, że co najwyżej $p-2$ spośród p wierzchołków grafu $\overline{K_p}$ można pokryć krawędziami niezależnymi w grafie $K_n + \overline{K_p}$ rozszerzając skojarzenie M do skojarzenia doskonałego w tym grafie. Zatem skojarzenia M nie da się rozszerzyć do skojarzenia doskonałego w grafie $K_n + \overline{K_p}$. Ostatecznie, na podstawie Wniosku 2.1.2 (str. 17), $ext(K_n + \overline{K_p}) = \frac{n-p}{2}$, co kończy dowód.

■

Kolejne rezultaty dotyczą grafu $G_1(G) + H$ zwanego złączeniem grafów G i H podgrafem G_1 grafu G (definicja str. 12).

Obserwacja 2.2.3. *Jeżeli G, H są grafami odpowiednio k, l-rozszerzalnymi ($k, l \geqslant 0$), to $ext(K_1(G) + H) = 0$.*

Dowód. Niech G, H spełniają założenia twierdzenia. Z definicji grafu k-rozszerzalnego i l-rozszerzalnego wynika, że istnieje skojarzenie doskonale M_G w grafie G i M_H w grafie H. Stąd oraz z definicji grafu $K_1(G)+H$ wynika, że graf $K_1(G)+H$ zawiera skojarzenie doskonałe postaci $M_G \cup M_H$, czyli $K_1(G) + H$ jest grafem 0-rozszerzalnym. Zauważmy ponadto, że dowolna krawędź $xy \in E(K_1(G)+H)$, gdzie $x \in V(G)$, $y \in V(H)$ nie da się rozszerzyć do skojarzenia doskonałego w grafie $K_1(G)+H$, gdyż liczby wierzchołków w grafach $G-x$ oraz $H-y$ są nieparzyste. Zatem graf $K_1(G)+H$ nie jest 1-rozszerzalnym, więc z Wniosku 2.1.2 (str. 17), $ext(K_1(G) + H) = 0$.

■

Wniosek 2.2.3. *Jeżeli graf G jest k-rozszerzalny dla $k \geqslant 0$, to $ext(K_1(G) + K_2) = 0$.*

Twierdzenie 2.2.7. *Jeżeli* $r \geqslant 2$, $K_r \leqslant G$ *oraz* G *jest grafem* k*-rozszerzalnym dla* $k \geqslant \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$, *to* $ext(K_r(G) + K_2) = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$.

Dowód. Niech K_r będzie podgrafem pełnym grafu G, $V(K_r) = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$ dla $r \geqslant 2$ oraz niech graf G będzie k-rozszerzalny dla $k \geqslant \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$. Oznaczmy, $R = K_r(G) + K_2$ oraz $V(K_2) = \{y_1, y_2\}$. Zauważmy, że liczba $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor \geqslant 1$, gdyż $r \geqslant 2$. Pokażemy najpierw, że dowolne skojarzenie, powiedzmy A, w grafie R mocy $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ jest podzbiorem pewnego skojarzenia doskonałego w grafie R. Rozważymy dwa przypadki w zależności od parzystości liczby r.

Przypadek 1. $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor = \frac{r-1}{2}$, tzn. r jest liczbą nieparzystą. Wtedy $r < |V(G)|$, na mocy Własności 2.1.1 (str. 14) oraz $r \geqslant 3$. Możliwe są dwa przepadki: $A \cap (E(G) \cup E(K_2)) = A$ lub $A \cap (E(G) \cup E(K_2)) \neq A$.

1.1. Załóżmy, że $A \cap (E(G) \cup E(K_2)) = A$. Wtedy $A \cap E(G)$ jest skojarzeniem w grafie G oraz $|A \cap E(G)| \leqslant \frac{r-1}{2}$. Z założenia, że graf G jest k-rozszerzalny dla $k \geqslant \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ otrzymujemy, na podstawie Twierdzenia 2.1.1 (str. 15), że graf G jest $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$-rozszerzalny. Stąd wynika, że zbiór $A \cap E(G)$ jest podzbiorem pewnego skojarzenia doskonałego M_G^1 w grafie G. Zatem $A \subset M_G^1 \cup E(K_2)$ oraz zbiór $M_G^1 \cup E(K_2)$ jest skojarzeniem doskonałym w grafie R.

1.2. Załóżmy, że $A \cap (E(G) \cup E(K_2)) \neq A$. Wtedy $A \cap \{xy_1, xy_2: \quad x \in V(K_r)\} \neq \emptyset$. Co więcej, $|A \cap \{xy_1, xy_2: \quad x \in V(K_r)\}| \leqslant 2$ ponieważ A jest zbiorem niezależnym krawędzi w grafie R. Zatem możliwe są dwa przypadki: $|A \cap \{xy_1, xy_2: \quad x \in V(K_r)\}| = 1$ lub $|A \cap \{xy_1, xy_2: \quad x \in V(K_r)\}| = 2$.
Niech $|A \cap \{xy_1, xy_2: \quad x \in V(K_r)\}| = 1$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $A \cap \{xy_1, xy_2: \quad x \in V(K_r)\} = \{x_1y_1\}$, gdzie $x_1 \in V(K_r)$. Jeżeli $r = 3$, to $|A| = 1$, więc $A = \{x_1y_1\}$. Z Wniosku 2.1.1 (str. 15) wynika, że w grafie R istnieje skojarzenie doskonałe $A \cup M_{G-\{x_1,x_2\}} \cup \{x_2y_2\}$, gdzie $M_{G-\{x_1,x_2\}}$ jest skojarzeniem doskonałym w grafie $G - \{x_1, x_2\}$, zawierające zbiór A. Oznacza to, że R jest grafem $\frac{r-1}{2}$-rozszerzalnym, gdy $r = 3$. Niech $r \geqslant 5$. Wtedy zbiór $A - \{x_1y_1\}$ jest skojarzeniem w grafie G mocy $\frac{r-3}{2}$, które pokrywa co najwyżej $r - 3$ wierzchołki podgrafu K_r. Ponieważ $\delta(K_r) = r - 1$ dlatego też można wnioskować, że istnieje wierzchołek $x_i \in V(K_r)$ sąsiadujący z wierzchołkiem x_1 w podgrafie K_r, który nie jest pokryty żadną krawędzią zbioru $A - \{x_1y_1\}$. Skoro graf G jest k-rozszerzalny dla $k \geqslant \frac{r-1}{2}$, to skojarzenie $(A - \{x_1y_1\}) \cup \{x_1x_i\}$ jest podzbiorem pewnego skojarzenia doskonałego w grafie G, powiedzmy M_G^2, gdyż $|(A - \{x_1y_1\}) \cup \{x_1x_i\}| = \frac{r-1}{2}$. Wtedy $A \subset (M_G^2 - \{x_1x_i\}) \cup \{x_iy_2, x_1y_1\}$, gdzie zbiór $(M_G^2 - \{x_1x_i\}) \cup \{x_iy_2, x_1y_1\}$ jest skojarzeniem doskonałym w grafie R zawierającym zbiór A.

Niech $|A \cap \{xy_1, xy_2\colon \ x \in V(K_r)\}| = 2$. Wówczas $|A| \geqslant 2$, więc $r \geqslant 5$. Niech $A \cap \{xy_1, xy_2\colon \ x \in V(K_r)\} = \{x_1y_1, x_2y_2\}$, gdzie $x_1, x_2 \in V(K_r)$. Jeżeli $r = 5$, to $|A| = 2$, więc $A = \{x_1y_1, x_2y_2\}$ oraz graf R jest z założenia k-rozszerzalny dla $k \geqslant 2$. Z Twierdzenia 2.1.3 (str. 15) wynika, że w grafie R istnieje skojarzenie doskonałe $A \cup M_{G-x_1x_2}$, gdzie $M_{G-x_1x_2}$ jest skojarzeniem doskonałym w grafie $G - x_1x_2$, zawierające zbiór A. Oznacza to, że R jest grafem $\frac{r-1}{2}$-rozszerzalnym, gdy $r = 5$. Niech $r \geqslant 7$. Wtedy zbiór $A - \{x_1y_1, x_2y_2\}$ jest skojarzeniem w grafie G mocy $\frac{r-5}{2}$, które pokrywa co najwyżej $r - 5$ wierzchołków podgrafu K_r. Ponieważ $\delta(K_r) = r - 1$, to istnieje wierzchołek $x_i \in V(K_r)$ sąsiadujący z wierzchołkiem x_1 w podgrafie K_r, który nie jest pokryty żadną krawędzią zbioru $A - \{x_1y_1\}$. Co więcej, istnieje wierzchołek $x_j \in V(K_r)$ sąsiadujący z wierzchołkami x_1 oraz x_i w podgrafie K_r, który nie jest pokryty żadną krawędzią zbioru $A - \{x_1y_1\}$. Prowadząc rozumowanie jak w poprzedniej części dowodu otrzymujemy skojarzenie doskonałe M_G^3 w grafie G zawierające skojarzenie $(A - \{x_1y_1, x_2y_2\}) \cup \{x_1x_i, x_2x_j\}$. Wtedy $A \subset (M_G^3 - \{x_1x_i, x_2x_j\}) \cup \{x_1y_1, x_2y_2, x_ix_j\}$, gdzie zbiór $(M_G^3 - \{x_1x_i, x_2x_j\}) \cup \{x_1y_1, x_2y_2, x_ix_j\}$ jest skojarzeniem doskonałym w grafie R zawierającym zbiór A. Zatem graf R jest $\frac{r-1}{2}$-rozszerzalny, gdy $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor = \frac{r-1}{2}$ i $r \geqslant 3$.

Przypadek 2. $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor = \frac{r}{2}$, tzn. r jest liczbą parzystą. Wtedy $r \leqslant |V(G)|$, na mocy Własności 2.1.1 (str. 14). Możliwe są, jak wcześniej, dwa przepadki: $A \cap (E(G) \cup E(K_2)) = A$ lub $A \cap (E(G) \cup E(K_2)) \neq A$. Jeżeli $A \cap (E(G) \cup E(K_2)) = A$, to prowadząc rozważania w analogiczny sposób jak w części 1.1 dowodu otrzymujemy, że zbiór A jest zawarty w skojarzeniu doskonałym w grafie R. Jeżeli $A \cap (E(G) \cup E(K_2)) \neq A$, to prowadząc rozumowanie jak w części 1.2 dowodu i zastępując liczbę $r - 3$ liczbą $r - 2$, gdy $|A \cap (E(G) \cup E(K_2))| = 1$, a liczbę $r - 5$ zastępując liczbą $r - 4$, gdy $|A \cap (E(G) \cup E(K_2))| = 2$, uzyskamy skojarzenie doskonałe w grafie R zawierające zbiór A. Zatem graf R jest $\frac{r}{2}$-rozszerzalny, gdy $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor = \frac{r}{2}$. Ostatecznie R jest $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$-rozszerzalny.

Z Wniosku 2.1.2 (str. 17) wynika, że dla dowodu twierdzenia wystarczy jeszcze pokazać, iż graf $R = K_r(G) + K_2$ nie jest $(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1)$-rozszerzalny. Jeżeli r jest liczbą nieparzystą ($r \geqslant 3$), to $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor = \frac{r-1}{2}$ oraz $\frac{r-1}{2} + 1 \geqslant 1$. Wtedy zbiór $\{x_1x_2, x_3x_4, ..., x_{r-2}x_{r-1}, x_ry_1\}$, gdzie $y_1 \in V(K_2)$ jest skojarzeniem w grafie R mocy $\frac{r-1}{2} + 1$, które pokrywa wszystkie wierzchołki zbioru $N_R(y_2) = V(K_r)$. Z Własności 2.1.2 (str. 15) wynika, że graf R nie jest grafem $(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1)$-rozszerzalnym, gdy r jest liczbą nieparzystą. Jeżeli teraz r jest liczbą parzystą ($r \geqslant 2$), to $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor = \frac{r}{2}$ oraz $\frac{r}{2} + 1 \geqslant 2$. Jeśli $K_r = G$, to $R = K_{r+2}$ oraz $ext(R) = ext(K_{r+2}) = \frac{r+2}{2} - 1 = \frac{r}{2}$ (Przykład 2.1.3) (str. 17). Jeśli $K_r < G$, to $|V(G)| \geqslant r + 2$, z Własności 2.1.1 (str. 14). Zatem $V(G) - V(K_r) \neq \emptyset$, więc

niech $z \in V(G) - V(K_r)$. Ze spójności grafu G wynika teraz, że istnieje wierzchołek, powiedzmy $x_1 \in V(K_r)$ sąsiadujący z wierzchołkiem z w grafie G, a więc także w grafie $K_r(G) + K_2$. Wtedy zbiór $\{zx_1, x_2x_3, x_4x_5, ..., x_{r-2}x_{r-1}, x_ry_1\}$ jest skojarzeniem w grafie $K_r(G) + K_2$ mocy $\frac{r}{2} + 1$, które pokrywa wszystkie wierzchołki zbioru $N_R(y_2) = V(K_r)$. Z Własności 2.1.2 (str. 15) wynika, że graf $R = K_r(G) + K_2$ nie jest grafem $(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1)$-rozszerzalnym także, gdy r jest liczbą parzystą.
Ostatecznie indeks rozszerzalności grafu $K_r(G) + K_2$ wynosi $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ dla $r \geqslant 2$, co należało udowodnić.

■

Twierdzenie 2.2.8. *Niech $S(G, H)$ będzie quasi-stertą grafów G i H wiszącą na krawędziach $xx' \in E(G)$, $hh' \in E(H)$ oraz niech k, l będą liczbami naturalnymi takimi, że $k, l \geqslant 1$. Jeżeli G, H są grafami odpowiednio k, l-rozszerzalnymi, to $ext(S(G, H)) = 1$.*

Dowód. Niech G, H spełniają założenia twierdzenia. Najpierw udowodnimy, że $S(G, H)$ jest grafem 1-rozszerzalnym. Niech e będzie dowolną krawędzią grafu $S(G, H)$. Rozpatrzymy następujące przypadki.

Przypadek 1. $e \in E(G)$ albo $e \in E(H)$. Bez straty ogólności niech $e \in E(G)$. Wówczas z k-rozszerzalności grafu G ($k \geqslant 1$) wynika, że graf G jest 1-rozszerzalny (Twierdzenie 2.1.1, str. 15), więc istnieje skojarzenie doskonałe M_G w grafie G, które zawiera krawędź e. Dodatkowo, z l-rozszerzalności grafu H wynika, że graf ten zawiera skojarzenie doskonałe M_H. Zatem $e \in M_G \cup M_H$ przy czym zbiór $M_G \cup M_H$ jest skojarzeniem doskonałym w grafie $S(G, H)$.

Przypadek 2. $e = xh$, gdzie $x \in V(G)$, $h \in V(H)$. Ponieważ liczby $|V(G) - \{x\}|$ oraz $|V(H) - \{h\}|$ są nieparzyste, musimy wziąć krawędź $x'h'$ aby rozszerzyć krawędź e do skojarzenia doskonałego w grafie $S(G, H)$. Przypomnijmy, że $xx' \in E(G)$ oraz $hh' \in E(H)$. Skoro G jest grafem k-rozszerzalnym dla $k \geqslant 1$ oraz H jest grafem l-rozszerzalnym dla $l \geqslant 1$, to Wniosek 2.1.1 (str. 15) implikuje teraz, że $G - \{x, x'\}$ jest grafem $(k-1)$-rozszerzalnym oraz graf $H - \{h, h'\}$ jest $(l-1)$-rozszerzalny. Zatem obydwa grafy $G - \{x, x'\}$ oraz $H - \{h, h'\}$ zawierają skojarzenia doskonałe $M_{G-\{x,x'\}}$ oraz odpowiednio $M_{H-\{h,h'\}}$. Zatem zbiór $\{xh, x'h'\} \cup M_{G-\{x,x'\}} \cup M_{H-\{h,h'\}}$ jest skojarzeniem doskonałym w grafie $S(G, H)$ zawierającym krawędź $e = xh$. Innymi słowy, $S(G, H)$ jest grafem 1-rozszerzalnym.
Na koniec pokażemy, że $S(G, H)$ nie jest grafem 2-rozszerzalnym. Z Twierdzenia 2.1.4 (str. 16) wynika, że $\delta(G) \geqslant 2$, więc $\deg_G x' \geqslant 2$. Możemy teraz wnioskować, że skojarze-

nie $\{xh, x'x_i\}$ in $S(G,H)$, gdzie $x_i \in N_G(x') - \{x\}$ nie da sie rozszerzyć do skojarzenia doskonałego w grafie $S(G,H)$, gdyż liczba $|V(G) - \{x, x_i, x'\}|$ jest nieparzysta. Ostatecznie, $ext(S(G,H)) = 1$, co należało wykazać.

■

2.3. Rozszerzalność grafów: $G_t, \hat{G}_t, G/H$

Grafy rozszerzalne, z których usunięto dowolną krawędź były rozważane w pracy [31]. Usunięcie dowolnej krawędzi z grafu k-rozszerzalnego ($k \geqslant 1$) powoduje zmniejszenie liczby k o jeden. Grafy rozszerzalne, do których dodano krawędź były rozważane w pracy [32]. Dodając do grafu k-rozszerzalnego ($k \geqslant 1$), który nie jest dwudzielny, dowolną krawędź z jego dopełnienia (do grafu pełnego) uzyskujemy graf $(k-1)$-rozszerzalny. Natomiast graf uzyskany przez dodanie do grafu dwudzielnego k-rozszerzalnego ($k \geqslant 0$) dowolnej krawędzi z jego dopełnienia do grafu pełnego dwudzielnego jest k-rozszerzalny. W tej części Rozdziału 2 zostanie wyznaczony indeks rozszerzalności grafów G_{2m} i $\hat{G}_{2m}$ nazwanych $2m$-podziałem krawędzi i $2m$-podziałem domkniętym krawędzi. Zbadana będzie również rozszerzalność grafu G/H zwanego ściągnięciem podgrafu H grafu G do nowego wierzchołka.

Twierdzenie 2.3.1. *Jeżeli G jest grafem k-rozszerzalnym dla $k \geqslant 2$, to $ext(G_{2m}) = 1$ dla $m \geqslant 1$.*

Dowód. Niech G_{2m} będzie grafem otrzymanym z grafu G przez podział krawędzi $uv \in E(G)$ wierzchołkami $y_1, y_2, ..., y_{2m}$ dla $m \geqslant 1$. Na początku udowodnimy, że G_{2m} jest grafem 1-rozszerzalnym tzn., że dowolną krawędź $e \in E(G_{2m})$ można rozszerzyć w grafie G_{2m} do skojarzenia doskonałego. Rozpatrzymy dwa przypadki.

Przypadek 1. $e \in E(G) - \{uv\}$. Skoro G jest grafem k-rozszerzalnym, to z Wniosku 2.1.1 (str. 15) oraz Twierdzenia 2.1.1 (str. 15) otrzymujemy, że graf $G - \{u, v\}$ jest 1-rozszerzalny. To oznacza, że jeśli krawędź e należy do zbioru $E(G - \{u, v\})$, to można ją rozszerzyć do skojarzenia doskonałego w grafie $G - \{u, v\}$, powiedzmy $e \in M_{G-\{u,v\}}$. Zatem zbiór $M_{G-\{u,v\}} \cup \{uy_1, y_2y_3, y_4y_5, ..., y_{2m}v\}$ jest skojarzeniem doskonałym w grafie G_{2m}. Jeśli krawędź e nie należy do zbioru $E(G - \{u, v\})$, to e pokrywa wierzchołek

u lub z wierzchołek v w grafie G. Bez straty ogólności niech e pokrywa wierzchołek u. Z Twierdzenia 2.1.1 oraz Twierdzenia 2.1.3 (str. 15) wynika, że graf $G - uv$ jest 1-rozszerzalny. Zatem krawędź e można rozszerzyć w grafie $G - uv$ do skojarzenia doskonałego, powiedzmy $e \in M_{G-uv}$. Co więcej, krawędź e należy do zbioru $M_{G-uv} \cup \{y_1y_2, y_2y_3, ..., y_{2m-1}y_{2m}\}$, który to zbiór jest skojarzeniem doskonałym w grafie G_{2m}.

Przypadek 2. $e \in E(G_{2m}) - E(G)$. Wtedy $e \in \{uy_1, y_{2m}v\} \bigcup_{i=1}^{2m-1} \{y_iy_{i+1}\}$. Skoro G jest grafem k-rozszerzalnym, to G zawiera skojarzenie doskonałe, powiedzmy M_G. Zauważmy teraz, że zbiory $(M_G - \{uv\}) \cup \{uy_1, y_2y_3, y_4y_5, ..., y_{2m}v\}$, gdy $uv \in M_G$ oraz $M_G \cup \{y_1y_2, y_2y_3, ..., y_{2m-1}y_{2m}\}$, gdy $uv \notin M_G$ są skojarzeniami doskonałymi w grafie G_{2m}. Oprócz tego, krawędź e należy do jednego z nich. Zatem G_{2m} jest grafem 1-rozszerzalnym.

Pokażemy, że graf G_{2m} nie jest 2-rozszerzalny. Z złożenia, że graf G jest k-rozszerzalny ($k \geqslant 2$) na podstawie Twierdzenia 2.1.4 (str. 16) mamy, $\delta(G) \geqslant 2$. Stąd wynika, że istnieje krawędź $vx \in E(G) - \{uv\}$ lub $ux \in E(G) - \{uv\}$. Bez straty ogólności rozważam $vx \in E(G) - \{uv\}$. Zauważmy, że skojarzenie $\{uy_1, vx\}$ w grafie G_{2m} dla $m = 1$ pokrywa wszystkie wierzchołki zbioru $N_{H_{2m}}(y_2)$. Z Własności 2.1.2 (str. 15) wynika, że graf G_{2m} dla $m = 1$ nie jest 2-rozszerzalny. Załóżmy, że $m \geqslant 2$. Wtedy skojarzenie $\{uy_1, y_3y_4\}$ w grafie G_{2m} pokrywy wszystkie wierzchołki zbioru $N_{H_{2m}}(y_2)$. Z Własności 2.1.2 (str. 15) wynika, że graf G_{2m} dla $m \geqslant 2$ nie jest 2-rozszerzalny. Z Wniosku 2.1.2 (str. 17) otrzymujemy tezę twierdzenia dla każdego $m \geqslant 1$.

■

Dowodząc analogicznie jak w Twierdzeniu 2.3.1 otrzymujemy

Twierdzenie 2.3.2. *Jeżeli G jest grafem k-rozszerzalnym dla $k \geqslant 2$, to $ext(\hat{G}_{2m}) = 1$ dla $m \geqslant 1$.*

Przypomnijmy, że G/H oznacza graf zwany ściągnięciem podgrafu H grafu G do nowego wierzchołka v_H. Definicja grafu G/H znajduje się na stronie 13.

Twierdzenie 2.3.3. *Jeżeli G będzie grafem k-rozszerzalnym dla $k \geqslant 1$ oraz $H \subset G$ taki, że $|V(H)| = 2l + 1$, gdzie $1 \leqslant l \leqslant k$ oraz dla każdego $x_i \in V(H)$, $H - x_i$ jest grafem 0-rozszerzalnym, to G/H jest grafem $(k - l)$-rozszerzalnym.*

Dowód. Załóżmy, że G i H spełniają założenia twierdzenia. Z założenia, że graf $H - x_i$ jest 0-rozszerzalny otrzymujemy skojarzenie doskonałe M_{H-x_i} w grafie $H - x_i$ mocy l. Ponieważ H jest podgrafem grafu G, to zbiór M_{H-x_i} jest skojarzeniem mocy l w grafie G. Skoro graf G jest k-rozszerzalny i $k \geqslant l$, to z Twierdzenia 2.1.1 (str. 15) wynika teraz, że G jest grafem l-rozszerzalnym. Zatem istnieje skojarzenie doskonałe w grafie G, powiedzmy M_G^1, zawierające skojarzenie M_{H-x_i}. Co więcej, skoro $x_i \in V(H)$ oraz $V(H) \subset V(G)$, to zbiór M_G^1 zawiera krawędź e_0 pokrywającą wierzchołek x_i. Niech $e_0 = x_i y_j$, gdzie $y_j \in V(G) - V(H)$ (oczywiście, $V(G) - V(H) \neq \emptyset$) oraz $\{v_H\} = V(G/H) - V(G)$. Wtedy z definicji grafu G/H wynika, że zawiera on skojarzenie doskonałe postaci $(M_G^1 - \{e_0\}) \cup \{v_H y_j\}$, czyli G/H jest grafem 0-rozszerzalnym. Jeżeli $k = l$, to $k - l = 0$, więc otrzymaliśmy tezę twierdzenia. Niech $k > l$. Wykażemy, że G/H jest grafem $(k-l)$-rozszerzalnym. Niech zbiór $A \subset E(G/H)$ będzie dowolnym skojarzeniem w grafie G/H mocy $k - l$. Możliwe są dwa przypadki

Przypadek 1. Załóżmy, że wierzchołek v_H jest pokryty krawędzią ze zbioru A, powiedzmy $e = v_H y_r$, gdzie $y_r \in V(G) - V(H)$. To oznacza (z definicji grafu G/H), że w podgrafie H istniał przynajmniej jeden wierzchołek, powiedzmy x_p, sąsiadujący z wierzchołkiem y_r w grafie G. Wtedy zbiór $(A - \{v_H y_r\}) \cup \{x_p y_r\}$ jest skojarzeniem mocy $k - l$ w grafie G pokrywającym tylko jeden wierzchołek zbioru $V(H)$, tj. wierzchołek x_p. Z założenia wynika, że w grafie $H - x_p$ istnieje skojarzenie doskonałe M_{H-x_p} mocy l. Zatem zbiór $(A - \{v_H y_r\}) \cup \{x_p y_r\} \cup M_{H-x_p}$ jest skojarzeniem w grafie G mocy k. Ponadto, z k-rozszerzalności grafu G wynika, że zbiór $(A - \{v_H y_r\}) \cup \{x_p y_r\} \cup M_{H-x_p}$ jest podzbiorem pewnego skojarzenia doskonałego M_G^2 w grafie G. Oznacza to, że $A \subset [M_G^2 - (\{x_2 y_i\} \cup M_{H-x_2})] \cup \{x y_i\}$, gdzie $[M_G^2 - (\{x_p y_r\} \cup M_{H-x_p})] \cup \{v_H y_r\}$ jest skojarzeniem doskonałym w grafie G/H.

Przypadek 2. Załóżmy, że wierzchołek v_H nie jest pokryty żadną krawędzią ze zbioru A. Wówczas z definicji grafu G/H wynika, że zbiór A jest skojarzeniem w grafie G mocy $k - l$, które nie pokrywa żadnego wierzchołka zbioru $V(H)$. Zatem zbiór $A \cup M_{H-x_q}$, gdzie M_{H-x_q} jest skojarzeniem doskonałym w grafie $H - x_q$, jest skojarzeniem w grafie G mocy k. Z k-rozszerzalności grafu G wynika, że skojarzenie $A \cup M_{H-x_q}$ jest zawarte w pewnym skojarzeniu doskonałym M_G^3 w grafie G. Co więcej, w zbiorze M_G^3 musi istnieć krawędź pokrywająca wierzchołek $x_q \in V(G)$. Niech krawędź $x_q y_s$, gdzie $y_s \in V(G) - V(H)$, należy do zbioru M_G^3. Wówczas $A \subset [M_G^3 - (\{x_q y_s\} \cup M_{H-x_q})] \cup \{v_H y_s\}$ a zbiór $[M_G^3 - (\{x_q y_s\} \cup M_{H-x_q})] \cup \{v_H y_s\}$ jest skojarzeniem doskonałym w grafie G/H. Z obu rozważanych przypadków wynika, że dowolne skojarzenie A zawierające $k - l$

krawędzi w grafie G/H można rozszerzyć do skojarzenia doskonałego w tym grafie. Tak więc graf G/H jest $(k-l)$-rozszerzalny, co kończy dowód.

■

Wniosek 2.3.1. *Jeżeli $H \in \{P_{2l+1}, C_{2l+1}, K_{2l+1}\}$ dla $l \geqslant 1$, G jest grafem k-rozszerzalnym dla $k \geqslant l$ oraz $H \subset G$, to graf G/H jest grafem $(k-l)$-rozszerzalnym.*

Rozdział 3

Grafy rozszerzalne w sensie Berge'a

3.1. Rozszerzalność krawędziowa grafów: $P_n, C_n, G + y, G^x, G_t, \hat{G}_t$

Definicja grafu k-rozszerzalnego krawędziowo w sensie Berge'a znajduje się na stronie 11. Jeżeli nie będzie to prowadziło do nieporozumienia, to będę pisać krótko: graf k-rozszerzalny. Wprost z definicji grafu k-rozszerzalnego krawędziowo w sensie Berge'a jako własność wynika warunek konieczny k-rozszerzalności ($k \geqslant 1$) krawędziowej w sensie Berge'a grafu G.

Własność 3.1.1. *Jeżeli graf G jest k-rozszerzalny krawędziowo w sensie Berge'a dla $k \geqslant 1$, to $\beta(G) \geqslant 2$ oraz $|V(G)| \geqslant 4$.*

Z definicji indeksu rozszerzalności w sensie Plummera oraz indeksu rozszerzalności krawędziowej w sensie Berge'a grafu G wynika

Własność 3.1.2. *Jeżeli $\beta(G) = \frac{1}{2}|V(G)|$ oraz $ext(G) \geqslant 1$, to $ext(G) = ext^*(G)$.*

Przypomnijmy, że graf G jest B^*-grafem jeżeli $\beta(G) = 1$ albo G jest grafem 1-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a. W pracy [13] autorzy udowodnili między innymi, że droga P_n jest B^*-grafem wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą nieparzystą ($n \geqslant 1$) oraz, że cykl C_n i każda jego potęga C_n^r, gdzie $1 \leqslant r \leqslant n$ (definicja str. 10) jest B^*-grafem dla każdego $n \geqslant 3$. Wykorzystując te wyniki można obliczyć liczbę rozszerzalności krawędziowej w sensie Berge'a drogi P_{2l+1} i cyklu C_{2l} dla $l \geqslant 2$ oraz liczbę rozszerzalności krawędziowej w sensie Berge'a cyklu C_{2l+1} dla $l \geqslant 3$.

Twierdzenie 3.1.1. *$ext^*(P_{2l+1}) = 1$ dla $l \geqslant 2$ oraz grafy P_1, P_3 i P_{2l} dla $l \geqslant 1$ nie są k-rozszerzalne krawędziowo w sensie Berge'a dla żadnego $k \geqslant 1$.*

Dowód. Zauważmy, że $\beta(P_{2l+1}) = l$ dla $l \geqslant 1$. Wówczas z definicji grafu k-rozszerzalnego krawędziowo w sensie Berge'a wynika, że graf P_{2l+1} nie może być k-rozszerzalny w sensie Berge'a dla żadnego $k > \beta(P_{2l+1}) - 1 = l - 1$. Dodatkowo P_{2l+1} jest grafem 1-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a albo $\beta(P_{2l+1}) = 1$, co wykazano w pracy [13]. Ponieważ $\beta(P_{2l+1}) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $l \in \{0, 1\}$, to P_{2l+1} jest grafem 1-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a wtedy i tylko wtedy, gdy $l \geqslant 2$. Zatem dla $l \geqslant 2$, $1 \leqslant ext^*(P_{2l+1}) \leqslant l - 1$. Jeżeli $l = 2$, to $ext^*(P_{2l+1}) = 1$. Załóżmy, że $l \geqslant 3$. Udowodnimy, że droga P_{2l+1} nie jest k-rozszerzalna krawędziowo w sensie Berge'a dla żadnego $k \geqslant 2$. Niech $V(P_{2l+1}) = \{x_1, x_2, ..., x_{2l+1}\}$. Oznaczmy, $A_i = \{x_2x_3, x_5x_6, x_7x_8, ..., x_{5+2i}x_{6+2i}\}$ dla $i = 0, 1, ..., l-3$. Łatwo zauważyć, że zbiory A_i są skojarzeniamiw grafie P_{2l+1} oraz $|A_i| = 2+i$ dla każdego $i = 0, 1, 2, ..., l-3$. Co więcej, zbiór A_0 jest skojarzeniem w podgrafie H indukowanym przez zbiór $\{x_1, x_2, ..., x_6\}$. Ponieważ każda krawędź zbioru $E(H) - A_0$ sąsiaduje z krawędzią x_2x_3 lub x_5x_6 w podgrafie H ($H \cong P_6$), to zbiór A_0 nie jest podzbiorem żadnego $\beta(H)$-zbioru. Zatem dowolne skojarzenie w grafie P_{2l+1} zawierające zbiór A_0 ma moc nie większą niż $|A_0| + \beta(P_{2l+1-6}) = 2 + l - 3 = l - 1$. Skoro $\beta(P_{2l+1}) = l$, to żaden ze zbiorów A_i dla $i = 1, ..., l-3$, zawierających A_0, nie da się rozszerzyć do $\beta(P_{2l+1})$-zbioru. Stąd wynika, że graf P_{2l+1} nie jest k-rozszerzalny dla żadnego $k = |A_i| = 2+i$, gdzie $i = 0, 1, ..., l-3$. To oznacza, że $ext^*(P_{2l+1}) = 1$ dla $l \geqslant 2$.

Z Własności 3.1.1 wynika, że dla $l = 0$ lub $l = 1$ droga P_{2l+1} nie jest k-rozszerzalna dla żadnego $k \geqslant 1$. Rozważmy graf P_{2l} dla $l \geqslant 1$. Przypuśćmy, że istnieje $k \geqslant 1$ takie, że graf P_{2l} jest k-rozszerzalny krawędziowo w sensie Berge'a. Zauważmy, że $\beta(P_{2l}) = l$, więc każdy $\beta(P_{2l})$-zbiór jest skojarzeniem doskonałym w grafie P_{2l}. Zatem graf P_{2l} jest k-rozszerzalny również w sensie Plummera dla $k \geqslant 1$, tzn. $ext(P_{2l}) \geqslant 1$. Tymczasem z Przykładu 2.1.2 (str. 17) wynika, że $ext(P_{2l}) = 0$ dla $l \geqslant 1$. Stąd wynika, że graf P_{2l}

$(l \geqslant 1)$ nie jest k-rozszerzalny krawędziowo w sensie Berge'a dla żadnego $k \geqslant 1$, co kończy dowód twierdzenia.

■

Twierdzenie 3.1.2.

$$ext^*(C_n) = \begin{cases} 2 & \textit{dla} \quad n = 2l+1 \textit{ jeżeli } l \geqslant 3, \\ 1 & \textit{dla} \quad \textit{pozostałych } n \geqslant 4 \end{cases}$$

oraz graf C_3 nie jest k-rozszerzalny krawędziowo w sensie Berge'a dla żadnego $k \geqslant 1$.

Dowód. Zauważmy, że $\beta(C_{2l+1}) = l$ dla $l \geqslant 1$. Wówczas z definicji grafu k-rozszerzalnego krawędziowo w sensie Berge'a wynika, że graf C_{2l+1} nie może być k-rozszerzalny dla żadnego $k > \beta(C_{2l+1}) - 1 = l - 1$. W pracy [13] wykazano, że w zależności od wartości liczby l, graf C_{2l+1} jest grafem 1-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a albo $\beta(C_{2l+1}) = 1$. Ponieważ $\beta(C_{2l+1}) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $l = 1$, to C_{2l+1} jest grafem 1-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a wtedy i tylko wtedy, gdy $l \geqslant 2$ oraz graf C_3 nie jest k-rozszerzalny krawędziowo w sensie Berge'a dla żadnego $k \geqslant 1$. Zatem dla $l \geqslant 2$, $1 \leqslant ext^*(C_{2l+1}) \leqslant l - 1$. Jeżeli $l = 2$, to $ext^*(C_{2l+1}) = 1$.

Załóżmy, że $l \geqslant 3$. Udowodnimy, że cykl C_{2l+1} jest 2-rozszerzalny krawędziowo w sensie Berge'a. Niech $V(C_{2l+1}) = \{x_1, x_2, ..., x_{2l+1}\}$. Zauważmy, że dowolne skojarzenie mocy 2 w grafie C_{2l+1} jest postaci: $A_i = \{x_1x_2, x_ix_{i+1}\}$, gdzie $i = 3, 4, ..., 2l$. Oznaczmy, $B_1 = \{x_1x_2, x_3x_4, x_5x_6, ..., x_{2l-1}x_{2l}\}$ oraz $B_2 = \{x_1x_2, x_4x_5, x_6x_7, ..., x_{2l}x_{2l+1}\}$. Wtedy zbiory B_1, B_2 są skojarzeniami w grafie C_{2l+1} oraz $|B_1| = |B_2| = l = \beta(C_{2l+1})$. Zatem B_1, B_2 są $\beta(C_{2l+1})$-zbiorami. Można zauważyć, że $A_i \subset B_1$ dla każdego $i = 3, 5, 7, ..., 2l - 1$ oraz $A_i \subset B_2$ dla każdego $i = 4, 6, 8, ..., 2l$. Stąd wynika, że C_{2l+1} jest grafem 2-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a. Jeżeli $l = 3$, to z definicji grafu k-rozszerzalnego krawędziowo w sensie Berge'a otrzymujemy $ext^*(C_{2l+1}) = 2$.

Niech $l \geqslant 4$. Pokażemy, że cykl C_{2l+1} nie jest grafem k-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a dla żadnego $k = 3, 4, ..., l-1$. Oznaczmy, $M_j = \{x_1x_2, x_4x_5, x_7x_8, x_9x_{10}, ..., x_{7+2j}x_{8+2j}\}$ dla $j = 0, 1, ..., l-4$. Zbiory M_j są skojarzeniami w grafie C_{2l+1} mocy $3+j$ dla każdego $j = 0, 1, ..., l - 4$. Co więcej, zbiór M_0 jest skojarzeniem w podgrafie $\langle X \rangle_{C_{2l+1}}$ indukowanym przez zbiór $X = \{x_1, x_2, ..., x_8\}$. Ponieważ $\langle X \rangle_{C_{2l+1}} \cong P_8$, to $\langle X \rangle_{C_{2l+1}}$ nie jest grafem 3-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a, co wynika z Twierdzenia 3.1.1. Zatem zbiór M_0 nie jest podzbiorem żadnego $\beta(\langle X \rangle_{C_{2l+1}})$-zbioru. Ponadto, dowolne skojarzenie w grafie C_{2l+1} zawierające zbiór M_0 ma moc nie większą niż $|A_0| + \beta(C_{2l+1} - X) = 2 + (l - 4) = l - 2$ (zauważmy, że $C_{2l+1} - V(H) \cong P_{2l-7}$).

Skoro $\beta(C_{2l+1}) = l$, to żaden ze zbiorów M_i dla $i = 0, 1, ..., l-4$ nie da się rozszerzyć do $\beta(C_{2l+1})$-zbioru. Stąd wynika, że graf C_{2l+1} nie jest k-rozszerzalny krawędziowo w sensie Berge'a dla żadnego $k = |M_j| = 3 + j$, gdzie $j = 0, 1, ..., l-4$. Pamiętając, że C_{2l+1} jest grafem 2-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a, wnioskujemy, że $ext^*(C_{2l+1}) = 2$ dla $l \geqslant 2$.
Rozważmy graf C_{2l} dla $l \geqslant 2$. Przypuśćmy, że $ext^*(C_{2l}) > 1$. Wtedy istnieje $k \geqslant 2$ takie, że graf C_{2l} jest k-rozszerzalny krawędziowo w sensie Berge'a. Zauważmy, że $\beta(C_{2l}) = l$, więc każdy $\beta(C_{2l})$-zbiór jest skojarzeniem doskonałym w grafie C_{2l}. Zatem graf C_{2l} jest k-rozszerzalny również w sensie Plummera dla $k \geqslant 2$, tzn. $ext(C_{2l}) \geqslant 2$. Tymczasem z Przykładu 2.1.1 (str. 17) wynika, że $ext(C_{2l}) = 1$ dla $l \geqslant 2$. Stąd wynika, że $ext^*(C_{2l}) = 1$ dla $l \geqslant 2$, co kończy dowód twierdzenia.

■

Przypomnę, że graf $G + y$ jest złączeniem grafu G i grafu K_1, a symbol G oznacza graf spójny. Udowodnię dwa twierdzenia pomocnicze, które będą wykorzystane w dowodach twierdzeń dotyczących rozszerzalności grafu $G + y$ (Twierdzenie 3.1.5, str. 39, Twierdzenie 3.1.6, str. 40).

Lemat 3.1.3. *Dla dowolnego grafu G*

$$\beta(G+y) = \begin{cases} \beta(G), & gdy \quad \beta(G) = \frac{1}{2}|V(G)|, \\ \beta(G)+1, & gdy \quad \beta(G) < \frac{1}{2}|V(G)|. \end{cases}$$

Dowód. Niech $B \subset E(G)$ będzie dowolnym $\beta(G)$-zbiorem. Z definicji grafu $G+y$ wynika, że zbiór B jest skojarzeniem w grafie $G+y$. Załóżmy, że $\beta(G) = \frac{1}{2}|V(G)|$. Oznacza to, że $|V(G)|$ jest liczbą parzystą i g zawiera skojarzenie doskonałe. Wykażemy, że zbiór B jest $\beta(G+y)$-zbiorem. Z definicji grafu $G + y$ wynika, że $|V(G+y)| = |V(G)| + 1$. Zatem $\beta(G+y) \leqslant \frac{1}{2}(|V(G+y)| - 1) = \frac{1}{2}(|V(G)| + 1 - 1) = \frac{1}{2}|V(G)|$. Ponieważ zbiór B jest skojarzeniem w grafie $G + y$ oraz $|B| = \beta(G) = \frac{1}{2}|V(G)|$, to B jest $\beta(G+y)$-zbiorem. Stąd $\beta(G+y) = \beta(G)$.
Załóżmy teraz, że $\beta(G) < \frac{1}{2}|V(G)|$. Wtedy istnieje wierzchołek $x \in V(G)$ nie pokryty żadną krawędzią zbioru B. Zatem zbiór $B \cup \{xy\}$ jest skojarzeniem w grafie $G + y$ oraz $|B \cup \{xy\}| = \beta(G) + 1$. Wykażemy, że $B \cup \{xy\}$ jest $\beta(G+y)$-zbiorem. Przypuśćmy, że istnieje skojarzenie $B' \subset E(G+y)$ takie, że $|B'| > \beta(G) + 1$. Rozważmy dwa przypadki. Jeżeli $B' \subset E(G)$, to $|B'| \leqslant \beta(G)$, sprzeczność z założeniem o zbiorze B'. Jeżeli B' nie zawiera się w zbiorze $E(G)$, to z definicji grafu $G + y$,

$B' - E(G) = \{x'y\}$, gdzie $x' \in V(G)$. Wówczas zbiór $B' - \{x'y\}$ jest skojarzeniem w grafie G oraz $|B' - \{x'y\}| > \beta(G) + 1 - 1 = \beta(G)$, co jest sprzeczne z definicją liczby $\beta(G)$. Stąd wniosek, że zbiór $B \cup \{xy\}$ jest $\beta(G+y)$-zbiorem, a $\beta(G+y) = \beta(G)+1$, co kończy dowód.

■

Lemat 3.1.4. *Jeżeli $\beta(G) < \frac{1}{2}|V(G)|$ oraz istnieje wierzchołek w grafie G, który jest pokryty przez każdy $\beta(G)$-zbiór, to graf $G+y$ nie jest grafem 1-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a.*

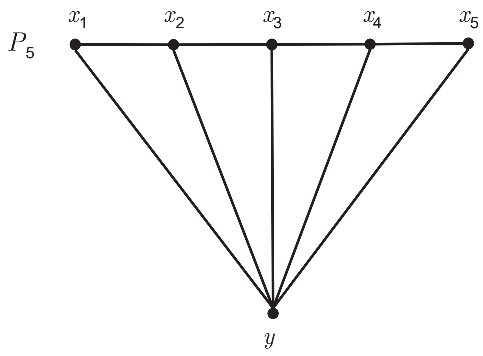
Dowód. Niech graf G zawiera wierzchołek x taki, że dowolny $\beta(G)$-zbiór pokrywa ten wierzchołek. Aby udowodnić tezę lematu wystarczy pokazać, że krawędź $xy \in E(G+y)$ nie da się rozszerzyć do $\beta(G+y)$-zbioru. Ponieważ $\beta(G) < \frac{1}{2}|V(G)|$, to z Lematu 3.1.3 wynika, że $\beta(G+y) = \beta(G)+1$. Ponadto, z definicji grafu $G+y$ otrzymujemy, że dowolne skojarzenie w grafie $G+y$ jest postaci: $B_1 \cup B_2$, gdzie B_1 jest podzbiorem najwyżej 1-elementowym zbioru $\{zy \in E(G+y) \colon \ \ z \in V(G)\}$, a B_2 jest dowolnym skojarzeniem w grafie G (lub $B_2 = \emptyset$ jeżeli $B_1 \neq \emptyset$). Gdyby krawędź xy można było rozszerzyć do zbioru B, który jest $\beta(G+y)$-zbiorem, to $|B| = \beta(G)+1$. Zatem $B = B_1 \cup B_2$, gdzie $B_1 = \{xy\}$ i B_2 jest skojarzeniem w grafie G mocy $\beta(G)$. Stąd wynika, że zbiór B_2 jest $\beta(G)$-zbiorem niepokrywającym wierzchołka x, co jest sprzeczne z założeniem. Ostatecznie więc krawędź xy nie da się rozszerzyć do $\beta(G+y)$-zbioru, co kończy dowód.

■

Przykład 3.1.1. Jeżeli $G = P_{2l+1}$ dla $l \geqslant 1$, to $G+y$ nie jest grafem k-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a dla żadnego $k \geqslant 1$.

Zauważmy, że $\beta(P_{2l+1}) = l < \frac{1}{2}|V(P_{2l+1})|$. Oznaczmy, $M_i = A_i \cup B_i$, gdzie $A_1 = \emptyset$ i $A_i = \bigcup\limits_{p=1}^{i-1}\{x_{2p-1}x_{2p}\}$ dla $i = 2,3,...,l+1$ oraz $B_i = \bigcup\limits_{q=i}^{l}\{x_{2q}x_{2q+1}\}$ dla $i = 1,2,...,l$ i $B_{l+1} = \emptyset$. Zauważmy, że zbiory M_i są wszystkimi możliwymi $\beta(P_{2l+1})$-zbiorami, a każdy wierzchołek x_{2j} dla $j = 1,2,...,l$ spełnia założenia powyższego lematu. Zatem $P_{2l+1}+y$ (Rysunek 3.1 dla $l = 2$) nie jest grafem 1-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a. Rzeczywiście krawędź $x_{2j}y$ nie należy do żadnego $\beta(P_{2l+1}+y)$-zbioru, gdyż $\beta(P_{2l+1}+y)$-zbiory F_i są postaci: $F_i = M_i \cup \{x_{2i-1}y\}$ dla $i = 1,2,...,l+1$. Jeżeli

$l = 2$, to $i = 1, 2, 3$ oraz $j = 1, 2$, więc $F_1 = \{x_1y, x_2x_3, x_4x_5\}$, $F_2 = \{x_1x_2, x_3y, x_4x_5\}$, $F_1 = \{x_1x_2, x_3x_4, x_5y, \}$ oraz $x_2y \notin F_1 \cup F_2 \cup F_3$ ani $x_4y \notin F_1 \cup F_2 \cup F_3$.



Rysunek 3.1. Graf $P_{2l+1} + y$ dla $l = 2$.

Przypomnę, że G jest grafem spójnym we wszystkich rozważaniach prowadzonych w pracy.

Twierdzenie 3.1.5. *Niech G będzie grafem* 1*-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a.*

1. *Jeżeli $\beta(G) = \frac{1}{2}|V(G)|$, to $G + y$ jest grafem* 1*-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a.*

2. *Jeżeli $\beta(G) < \frac{1}{2}|V(G)|$, to $G + y$ jest grafem* 1*-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wierzchołka grafu G istnieje $\beta(G)$-zbiór, którego krawędzie nie pokrywają tego wierzchołka.*

Dowód. Niech G będzie grafem 1-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a.

Dowód części 1. Niech $\beta(G) = \frac{1}{2}|V(G)|$. Wówczas z Lematu 3.1.3 wynika, że $\beta(G+y) = \beta(G)$. Należy pokazać, że dowolna krawędź $e \in E(G+y)$ należy do pewnego $\beta(G + y)$-zbioru. Rozważmy przypadki

Przypadek 1. $e \in E(G)$. Wtedy z założenia, że G jest grafem 1-rozszerzalnym wynika, że istnieje zbiór B_1 będący $\beta(G)$-zbiorem taki, że $e \in B_1$. Z definicji grafu $G+y$ wynika, że zbiór B_1 jest skojarzeniem w grafie $G+y$ oraz $|B_1| = \beta(G) = \beta(G+y)$. Zatem B_1 jest $\beta(G + y)$-zbiorem oraz $e \in B_1$, co należało wykazać.

Przypadek 2. $e \notin E(G)$. Wtedy $e = xy \in E(G + y)$, gdzie $x \in V(G)$. Ze spójności grafu G wynika istnienie wierzchołka $x' \in V(G)$, który jest sąsiadem wierzchołka x w grafie G. Z założenia, że G jest 1-rozszerzalny wynika dalej, że istnieje zbiór B_2 będący $\beta(G)$-zbiorem taki, że $xx' \in B_2$. Zatem zbiór $(B_2 - \{xx'\}) \cup \{xy\}$ jest skojarzeniem w grafie $G + y$ mocy $\beta(G) = \beta(G + y)$ oraz $e \in (B_2 - \{xx'\}) \cup \{xy\}$. To kończy dowód części 1 tezy twierdzenia.

Dowód części 2. Niech $\beta(G) < \frac{1}{2}|V(G)|$. Jeżeli istnieje wierzchołek w grafie G, który jest pokryty przez każdy $\beta(G)$-zbiór, to graf $G+y$ nie jest 1-rozszerzalny krawędziowo w sensie Berge'a, na podstawie Lematu 3.1.4. Załóżmy, że dla każdego wierzchołka grafu G istnieje $\beta(G)$-zbiór, który go nie pokrywa. Pokażemy, że dowolna krawędź $e \in E(G+y)$ należy do pewnego $\beta(G+y)$-zbioru. Z Lematu 3.1.3 wynika, że $\beta(G+y) = \beta(G) + 1$. Rozważmy przypadki

Przypadek 1. $e \in E(G)$. Wtedy z założenia, że G jest grafem 1-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a wynika, że istnieje $\beta(G)$-zbiór, powiedzmy B_3, taki, że $e \in B_3$. Ponieważ $\beta(G) < \frac{1}{2}|V(G)|$, czyli $2\beta(G) < |V(G)|$, więc istnieje wierzchołek $z \in V(G) - V(\langle B_3 \rangle_G)$. Dlatego też zbiór $B_3 \cup \{zy\}$ jest skojarzeniem w grafie $G + y$ oraz $|B_3 \cup \{zy\}| = \beta(G) + 1 = \beta(G + y)$. Zatem $B_3 \cup \{zy\}$ jest rozszerzeniem krawędzi e do $\beta(G + y)$-zbioru.

Przypadek 2. $e \notin E(G)$. Wtedy $e = xy \in E(G + y) - E(G)$, gdzie $x \in V(G)$. Z założenia wynika, że istnieje $\beta(G)$-zbiór B_x nie pokrywający wierzchołka x. Zatem zbiór $B_x \cup \{xy\}$ jest skojarzeniem w grafie $G+y$ oraz $|B_x \cup \{xy\}| = \beta(G)+1 = \beta(G+y)$, czyli $B_x \cup \{xy\}$ jest $\beta(G + y)$-zbiorem zawierającym krawędź $e = xy$.
Ostatecznie $G+y$ jest grafem 1-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a, co kończy dowód twierdzenia.

■

Twierdzenie 3.1.6. *Niech G będzie grafem* 1*-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a, w którym istnieje wierzchołek wiszący. Wówczas $G+y$ nie jest grafem* 1*-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a.*

Dowód. Niech $x \in V(G)$ będzie wierzchołkiem wiszącym grafu G, który jest grafem 1-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a. Wtedy $N_G(x) = \{x'\}$. Wykażemy, że każdy $\beta(G)$-zbiór pokrywa wierzchołek x'. Załóżmy, że istnieje $\beta(G)$-zbiór, powiedzmy B, który nie pokrywa wierzchołka x'. Co więcej, B nie pokrywa również wierzchołka x, ponieważ $N_G(x) = \{x'\}$. Stąd wnioskujemy, że zbiór $B \cup \{xx'\}$ jest skojarzeniem w grafie G. Skoro $|B| = \beta(G)$, to $|B \cup \{xx'\}| = \beta(G)+1$, co jest sprzeczne z definicją liczby $\beta(G)$. Pokazaliśmy więc, że istnieje wierzchołek $x' \in V(G)$ który jest pokryty przez każdy $\beta(G)$-zbiór. Zauważmy teraz, że z Własności 3.1.1 wynika, iż $|V(G)| \geqslant 4$. Ze spójności grafu G możemy teraz wnioskować, że $deg_G(x') \geqslant 2$, czyli istnieje wierzchołek $x'' \neq x$ taki, że $x'' \in N_G(x')$. Założenie, że G jest grafem 1-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a gwarantuje, iż krawędź $x''x'$ należy do pewnego $\beta(G)$-zbioru, B'. Co więcej, B' nie pokrywa wierzchołka x, ponieważ $N_G(x) = \{x'\}$. Zatem $|B'| = \beta(G) < \frac{1}{2}|V(G)|$. Korzystając teraz z Lematu 3.1.4 otrzymujemy tezę twierdzenia.

■

Przypomnę, że G^x oznacza graf zwany duplikacją wierzchołka x. Definicja grafu G^x znajduje się na stronie 13.

Lemat 3.1.7. *Dla dowolnego grafu G, $\beta(G) \leqslant \beta(G^x) \leqslant \beta(G) + 1$.*

Dowód. Niech $x \in V(G)$ oraz $B \subset E(G)$ będzie dowolnym $\beta(G)$-zbiorem, tzn. zbiór B jest skojarzeniem w grafie G oraz $|B| = \beta(G)$. Rozważmy dwa przypadki

Przypadek 1. Załóżmy, że zbiór B pokrywa wszystkie wierzchołki zbioru $N_G(x)$. Pokażemy, że zbiór B jest $\beta(G^x)$-zbiorem. Z definicji duplikacji wierzchołka wynika, że zbiór B jest skojarzeniem także w grafie G^x. Wykażemy, że $|B| = \beta(G^x)$. Przypuśćmy, że w grafie G^x istnieje skojarzenie B' takie, że $|B'| > |B|$. Jeżeli $B' \subset E(G)$, to B' jest skojarzeniem w grafie G, więc $|B'| \leqslant \beta(G) = |B|$, sprzeczność. Jeżeli B' nie zawiera się w zbiorze $E(G)$, to z definicji grafu G^x wynika, że $B' = B'' \cup \{x'y\}$, gdzie B'' jest $\beta(G)$-zbiorem, x' jest kopią wierzchołka x, a $y \in N_G(x)$. Ponieważ B'' jest $\beta(G)$-zbiorem, to pokrywa on wszystkie wierzchołki zbioru $N_G(x)$. Stąd otrzymujemy sprzeczność, gdyż B' nie jest skojarzeniem w grafie G^x. Zatem zbiór B jest największym skojarzeniem w grafie G^x, więc $\beta(G^x) = |B| = \beta(G)$.

Przypadek 2. Załóżmy, żezbiór B nie pokrywa wszystkich wierzchołków zbioru $N_G(x)$. Niech $y \in N_G(x)$ będzie wierzchołkiem, którego nie pokrywa zbiór B. Wówczas $B \cup \{x'y\}$ jest skojarzeniem w grafie G^x. Zauważmy, podobnie jak w Przypadku 1, że dowolne skojarzenie w grafie G^x zawiera krawędzie niezależne w grafie G i co najmniej jedną krawędź która nie należy do zbioru $E(G)$. Ponieważ B jest największym skojarzeniem w grafie G, to zbiór $B \cup \{x'y\}$ jest największym z możliwych skojarzeń w grafie G^x, czyli $\beta(G^x)$-zbiorem. Zatem $\beta(G^x) = \beta(G) + 1$.
Ostatecznie $\beta(G^x) \in \{\beta(G), \beta(G) + 1\}$, więc $\beta(G) \leqslant \beta(G^x) \leqslant \beta(G) + 1$, co należało wykazać.

■

Wniosek 3.1.1. *$\beta(G^x) = \beta(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy $\beta(G)$-zbiór pokrywa wszystkie wierzchołki zbioru $N_G(x)$.*

Obserwacja 3.1.1. *Jeżeli G jest grafem 1-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a oraz $\beta(G^x) = \beta(G)$, to graf G^x jest grafem 1-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a.*

Dowód. Niech G będzie grafem 1-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a oraz $\beta(G) = \beta(G^x)$. Pokażemy, że dla dowolnej krawędzi $e \in E(G^x)$ istnieje $\beta(G^x)$-zbiór zawierający tę krawędź. Rozważmy dwa przypadki

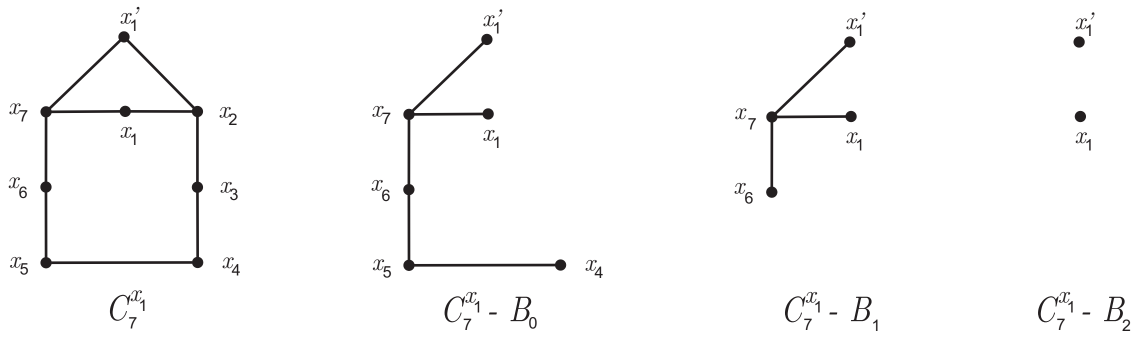
Przypadek 1. $e \in E(G)$. Wówczas z założenia, że graf G jest 1-rozszerzalny wynika, że istnieje $\beta(G)$-zbiór, powiedzmy $B_1 \subset E(G)$, który zawiera krawędź e. Z definicji grafu G^x oraz z równości $\beta(G^x) = \beta(G)$ wnioskujemy, że B_1 jest $\beta(G^x)$-zbiorem zawierającym krawędź e.

Przypadek 2. $e \notin E(G)$. Wówczas $e = x'y \in E(G^x) - E(G)$, gdzie x' jest kopią wierzchołka x oraz $y \in N_G(x)$. Z założenia, że graf G jest 1-rozszerzalny wynika, że istnieje $\beta(G)$-zbiór, powiedzmy $B_2 \subset E(G)$, który zawiera krawędź $xy \in E(G)$. Zatem krawędź $e = x'y \in (B_2 - \{xy\}) \cup \{x'y\}$ oraz zbiór$(B_2 - \{xy\}) \cup \{x'y\}$ jest $\beta(G^x)$-zbiorem, ponieważ jest on skojarzeniem w grafie G^x mocy $\beta(G) = \beta(G^x)$.
Ostatecznie graf G^x jest 1-rozszerzalny krawędziowo w sensie Berge'a, co kończy dowód.

■

Uwaga 3.1.1. Zauważmy, że jeśli $\beta(G^x) = \beta(G) + 1$, to z 1-rozszerzalności krawędziowej w sensie Berge'a grafu G nie musi wynikać k-rozszerzalność krawędziowa w sensie Berge'a grafu G^x dla żadnego $k \geqslant 1$. Niech $G = C_7$. Wtedy łatwo sprawdzić, że $\beta(C_7) = 3$. Z Twierdzenia 3.1.2 wynika, że $ext^*(C_7) = 2$. Dla dowolnego wierzchołka $x_1 \in V(C_7)$ mamy $\beta(C_7^{x_1}) = \beta(C_7) + 1 = 4$, więc $\beta(C_7^{x_1})$-zbiory są skojarzeniami doskonałymi w grafie $C_7^{x_1}$ (Rysunek 3.2). Oznaczmy, $A_i = \{x_2x_3, x_4x_5, ..., x_{2+2i}x_{3+2i}\}$ dla $i = 0, 1, 2$. Wówczas zbiory A_i dla $i = 0, 1, 2$ są skojarzeniami mocy $1 + i$ w grafie $C_7^{x_1}$. Oznaczmy, $B_i = \{x_2, x_3, ..., x_{2+2i}, x_{3+2i}\}$ dla $i = 0, 1, 2$. Ponieważ podgraf $C_7^{x_1} - B_i$ grafu $C_7^{x_1}$ dla $i = 0, 1$ (Rysunek 3.2) zawiera dwa wierzchołki wiszące x_1, x_1' mające wspólnego sąsiada x_7, więc graf $C_7^{x_1} - B_i$ nie ma skojarzenia doskonałego. Oznacza to, że graf $C_7^{x_1}$ nie jest grafem $(1+i)$-rozszerzalnym w sensie Plummera dla $i = 0, 1$ i również nie jest grafem $(1+i)$-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a, gdyż $\beta(C_7^{x_1})$-zbiory są skojarzeniami doskonałymi. Ponieważ $C_7^{x_1} - B_2 \cong \overline{K_2}$ (Rysunek 3.2), więc graf $C_7^{x_1} - B_2$ nie ma skojarzenia doskonałego, czyli $C_7^{x_1}$ nie jest grafem 3-rozszerzalnym w sensie Plummera i również nie jest grafem 3-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a. Ostatecznie więc 1-rozszerzalność krawędziowa w sensie Berge'a cyklu C_7 nie implikuje k-rozszerzalności krawędziowej w sensie Berge'a dla $k = 1, 2, 3$ grafu $C_7^{x_1}$.

Rozumując analogicznie można pokazać, że graf $C_{2l+1}^{x_1}$ dla $l \geqslant 3$ nie jest grafem k-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a dla żadnego $k \geqslant 1$.



Rysunek 3.2. Graf $C_7^{x_1}$ oraz podgrafy $C_7^{x_1} - B_i$ grafu $C_7^{x_1}$ dla $i = 0, 1, 2$.

Twierdzenie 3.1.8. *Jeżeli G jest grafem l-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a dla $l = k-1, k$ $(k \geqslant 2)$ oraz $\beta(G^x) = \beta(G)$, to G^x jest grafem k-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a.*

Dowód. Niech G będzie grafem k- oraz $(k-1)$-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a. Załóżmy, że x jest wierzchołkiem grafu G, dla którego zachodzi równość $\beta(G^x) = \beta(G)$. Niech $B \subset E(G^x)$ będzie dowolnym skojarzeniem w grafie G^x mocy k dla $k \leqslant \beta(G) - 1$. Pokażemy, że zbiór B można rozszerzyć do $\beta(G^x)$-zbioru. Możliwe są dwa przypadki

Przypadek 1. $B \cap E(G) = B$. Wtedy z założenia, że graf G jest k-rozszerzalny wynika, iż istnieje $\beta(G)$-zbiór, powiedzmy B_1 taki, że $B_1 \supset B$. Z definicji grafu G^x wynika, że B_1 jest skojarzeniem w grafie G^x mocy $\beta(G)$. Z równości $\beta(G) = \beta(G^x)$ wynika więc, że B_1 jest $\beta(G^x)$-zbiorem zawierającym zbiór B.

Przypadek 2. $B \cap E(G) \neq B$. Wtedy istnieje krawędź $x'y \in B - E(G)$, gdzie x' jest kopią wierzchołka x oraz $y \in N_G(x)$. Zauważmy, że zbiór $B - \{x'y\}$ jest skojarzeniem, w grafie G mocy $k-1$, które nie pokrywa wierzchołka $y \in V(G)$. Z założenia, że graf G jest $(k-1)$-rozszerzalny wynika, iż zbiór $B - \{x'y\}$ zawiera się w pewnym

$\beta(G)$-zbiorze, powiedzmy B_2. Ponieważ $\beta(G^x) = \beta(G)$, to zgodnie z Wnioskiem 3.1.1 zbiór B_2 pokrywa wszystkie wierzchołki zbioru $N_G(x)$. Zatem istnieje krawędź $e \in B_2$, która pokrywa wierzchołek $y \in N_G(x)$. Stąd wynika, że zbiór B zawiera się w zbiorze $(B_2 - \{e\}) \cup \{x'y\}$, który jest skojarzeniem w grafie G^x mocy $\beta(G) = \beta(G^x)$, czyli jest $\beta(G^x)$-zbiorem.
Ostatecznie graf G^x jest k-rozszerzalny krawędziowo w sensie Berge'a, co należało udowodnić.

■

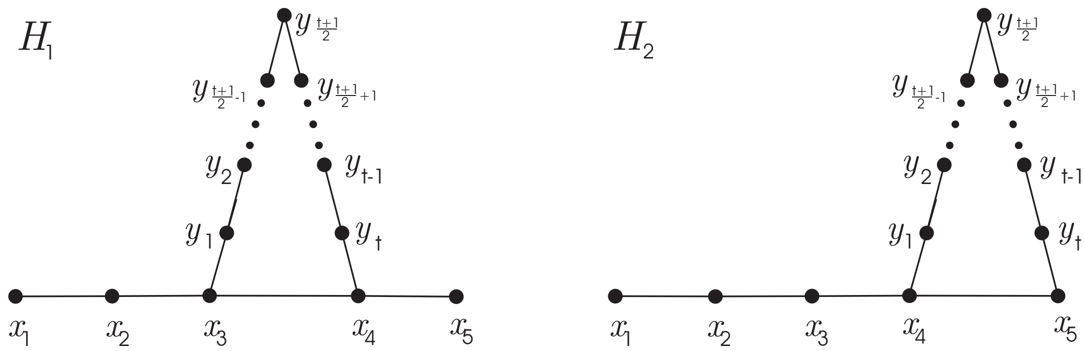
Wniosek 3.1.2. *Jeżeli graf G spełnia założenia Twierdzenia 3.1.8, to* $ext^*(G^x) \geqslant ext^*(G)$.

Przypomnę, że symbole $G_t, \hat{G}_t$ oznaczają graf zwany t-podziałem i odpowiednio domkniętym t-podziałem krawędzi grafu G. Wykorzystując rezultaty zawarte w części trzeciej Rozdziału 2, tj. Twierdzenie 2.3.1 (str. 30), Twierdzenie 2.3.2 (str. 31), oraz Własność 3.1.2 (str. 34) otrzymujemy związek między rozszerzalnością grafu G rozumianą w sensie Plummera a rozszerzalnością krawędziową w sensie Berge'a grafu G_{2m} i $\hat{G}_{2m}$.

Twierdzenie 3.1.9. *Jeżeli G jest grafem k-rozszerzalnym w sensie Plummera dla* $k \geqslant 2$, *to* $ext^*(G_{2m}) = ext^*(\hat{G}_{2m}) = 1$ *dla* $m \geqslant 1$.

Uwaga 3.1.2. Zauważmy, że z 1-rozszerzalności krawędziowej w sensie Berge'a grafu G nie musi wynikać k-rozszerzalność grafu G_t ($t \geqslant 1$) dla żadnego $k \geqslant 1$. Niech $G = P_{2l+1}$ dla $l \geqslant 2$. Wtedy z Twierdzenia 3.1.1 (str. 35) wynika, że $ext^*(P_{2l+1}) = 1$. Oczywiste jest, że $G_t \cong P_{2l+1+t}$. Jeżeli t jest liczbą nieparzystą, to $2l + 1 + t$ jest liczbą parzystą większą niż cztery, więc z Twierdzenia 3.1.1 wynika, że G_t nie jest grafem k-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a dla żadnego $k \geqslant 1$. Jeżeli t jest liczbą parzystą, to z tego samego twierdzenia otrzymujemy $ext^*(G_t) = 1$. Co więcej, z 1-rozszerzalności krawędziowej w sensie Berge'a grafu G_t ($t \geqslant 1$) nie musi wynikać k-rozszerzalność grafu G dla żadnego $k \geqslant 1$. Na przykład jeżeli $t = 2m + 1$, gdzie $m \geqslant 1$ oraz $G_t \cong P_{2l+t}$ dla $l \geqslant 1$, to $ext^*(G_t) = 1$. Łatwo sprawdzić, że $G \cong P_{2l}$, więc G nie jest grafem k-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a.

Uwaga 3.1.3. Zauważmy, że z 1-rozszerzalności krawędziowej w sensie Berge'a grafu G nie musi również wynikać k-rozszerzalność grafu $\hat{G}_t$ dla żadnego $k \geqslant 1$. Niech $G = P_5$. Wtedy z Twierdzenia 3.1.1 (str. 35) wynika, że $ext^*(P_5) = 1$. Oczywiste jest, że $\hat{G}_t \cong H_1$ lub $\hat{G}_t \cong H_2$ (patrz Rysunek 3.3). Jeżeli t jest liczbą nieparzystą, to $5 + t$ jest liczbą parzystą. Łatwo zauważyć, że $\beta(\hat{G}_t) = \frac{t+5}{2}$. Dodatkowo skojarzenia $\{x_2x_3\}$, $\{x_2x_3, y_1y_2, y_3y_4, ..., y_{1+2i}y_{2+2i}\}$, $\{x_2x_3, y_1y_2, y_3y_4, ..., y_{t-2}y_{t-1}, y_tx_4\}$, gdzie $i \in \{0, 1, ..., \frac{t-3}{2}\}$ mocy 1 lub $2 + i$ lub $\frac{t+3}{2}$ nie dają się rozszerzyć do $\beta(H_1)$-zbioru, a skojarzenia $\{x_2x_3\}$, $\{x_2x_3, x_4y_1, y_2y_3, y_4y_5, ..., y_{2+2i}y_{3+2i}\}$, gdzie $i \in \{0, 1, ..., \frac{t-3}{2}\}$ mocy 1 lub $2 + i$ nie dają się rozszerzyć do $\beta(H_2)$-zbioru. Zatem $\hat{G}_t$ nie jest grafem k-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a dla żadnego $k \geqslant 1$. Analogicznie z 1-rozszerzalności krawędziowej w sensie Berge'a grafu $\hat{G}_t$ ($t \geqslant 1$) nie musi wynikać k-rozszerzalność grafu G dla żadnego $k \geqslant 1$.



Rysunek 3.3. Grafy H_1, H_2.

3.2. Rozszerzalność wierzchołkowa grafów: $P_n, C_n, C_n^r, G_1 + G_2 + \cdots + G_n$

Wprost z definicji grafu k-rozszerzalnego wierzchołkowo w sensie Berge'a (str. 11) wynikają następujące własności

Własność 3.2.1. *Jeżeli graf G jest k-rozszerzalny wierzchołkowo w sensie Berge'a dla $k \geqslant 1$, to $\alpha(G) \geqslant 2$ oraz $|V(G)| \geqslant 3$.*

Własność 3.2.2. *Jeżeli $\alpha(G) \geqslant 2$, to żaden wierzchołek uniwersalny grafu G nie należy do $\alpha(G)$-zbioru (jeżeli $deg_G x = |V(G)| - 1$, to x nazywamy wierzchołkiem uniwersalnym grafu G).*

Własność 3.2.3. *Jeżeli graf G ma wierzchołek uniwersalny, to G nie jest grafem 1-rozszerzalnym wierzchołkowo w sensie Berge'a.*

Przypomnijmy, że graf G jest B-grafem jeżeli $\alpha(G) = 1$ albo G jest grafem 1-rozszerzalnym wierzchołkowo w sensie Berge'a. W pracy [13] autorzy udowodnili między innymi, że droga P_n jest B-grafem wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą oraz, że każdy cykl C_n i każda jego potęga C_n^r (definicja potęgi G^r grafu G znajduje się na stronie 10), gdzie $1 \leqslant r \leqslant n$ jest B-grafem. Wykorzystując te wyniki można obliczyć liczbę rozszerzalności wierzchołkowej w sensie Berge'a dla wspomnianych grafów. Sposób dowodzenia byłby analogiczny do dowodu Twierdzenia 3.1.1 (str. 35), czy Twierdzenia 3.1.2 (str. 36). Nietrudno udowodnić, że dla dowolnego grafu G i jego grafu krawędziowego $L(G)$ zachodzi równość

$$Ext(L(G)) = ext^*(G) \tag{3.1}$$

Łatwo zauważyć, że

$$L(P_{n+1}) = P_n \quad dla \quad n \geqslant 1 \tag{3.2}$$

oraz

$$L(C_n) = C_n \quad dla \quad n \geqslant 3 \tag{3.3}$$

Wykorzystując wzory (3.1) i (3.2) na podstawie Twierdzenia 3.1.1 (str. 35) można uzyskać tezę twierdzenia

Twierdzenie 3.2.1. *$Ext(P_{2l}) = 1$ dla $l \geqslant 2$ oraz grafy P_2 i P_{2l+1} dla $l \geqslant 0$ nie są k-rozszerzalne wierzchołkowo w sensie Berge'a dla żadnego $k \geqslant 1$.*

Natomiast na podstawie Twierdzenia 3.1.2 (str. 36) otrzymujemy

Twierdzenie 3.2.2.

$$Ext(C_n) = \begin{cases} 2 & dla \quad n = 2l + 1 \text{ } jeżeli \text{ } l \geqslant 3, \\ 1 & dla \quad pozostałych \text{ } n \geqslant 4 \end{cases}$$

oraz graf C_3 nie jest k-rozszerzalny wierzchołkowo w sensie Berge'a dla żadnego $k \geqslant 1$.

Rozważania w grafie krawędziowym $L(G)$ nie muszą być prostsze niż w grafie G.

Twierdzenie 3.2.3. *Niech l, n, r będą liczbami naturalnymi, $n \geqslant 4$ oraz niech $A = \{4, 5, ..., 2r + 1\}$.*

1. *Jeżeli $r \leqslant \frac{n}{2} - 1$ oraz $n \notin A$, to*

$$Ext(C_n^r) = \begin{cases} 2 & dla \quad n = l(r + 1) + r \text{ } jeżeli \text{ } l \geqslant 3, \\ 1 & dla \quad pozostałych \text{ } n \notin A. \end{cases}$$

2. *Jeżeli $r \leqslant \frac{n}{2} - 1$ oraz $n \in A$ albo jeżeli $r \geqslant \frac{n}{2}$, to grafy C_n^r nie są grafami k-rozszerzalnymi wierzchołkowo w sensie Berge'a dla żadnego $k \geqslant 1$.*

Dowód. Jeżeli $r = 1$, to $C_n^r = C_n$, więc teza wynika z Twierdzenia 3.2.2. Niech $r \geqslant 2$.

Dowód części 1. Załóżmy, że $r \leqslant \frac{n}{2} - 1$ oraz $n \notin A$. Zauważmy, że $\alpha(C_n^r) = \left\lfloor \frac{n}{r+1} \right\rfloor$ dla każdego $n \geqslant 4$. Wówczas z definicji grafu k-rozszerzalnego wierzchołkowo w sensie Berge'a wynika, że liczba k nie może być większa niż $\alpha(C_n^r) - 1 = \lfloor \frac{n}{r+1} \rfloor - 1$. W pracy [13] wykazano, że w zależności od wartości liczby l, graf C_n^r jest grafem 1-rozszerzalnym wierzchołkowo w sensie Berge'a albo $\alpha(C_n^r) = 1$. Ponieważ $\alpha(C_n^r) \geqslant 2$ dla każdego $r \in \{1, 2, ..., \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$ i $n \geqslant 4$, to C_n^r jest grafem 1-rozszerzalnym wierzchołkowo w sensie Berge'a wtedy i tylko wtedy, gdy $n \geqslant 4$, więc $1 \leqslant Ext(C_n^r) \leqslant \alpha(C_n^r) - 1 = \lfloor \frac{n}{r+1} \rfloor - 1$ dla $n \geqslant 4$. Niech $V(C_n^r) = \{x_1, x_2, ...x_n\}$ dla $n \geqslant 4$. Rozważymy dwa przypadki

Przypadek 1. $n = l(r + 1) + r$ $(l \geqslant 3)$. Wtedy $\alpha(C_n^r) = l \geqslant 3$ oraz $1 \leqslant Ext(C_n^r) \leqslant \alpha(C_n^r) - 1 = l - 1$. Pokażemy, że graf C_n^r jest 2-rozszerzalny wierzchołkowo w sensie Berge'a ale nie jest k-rozszerzalny w tym sensie dla żadnego k spełniającego warunek $3 \leqslant k \leqslant \lfloor \frac{n}{r+1} \rfloor - 1 = l - 1$. Zauważmy, że dowolny zbiór niezależny wierzchołków mocy 2 w grafie C_n^r jest postaci: $A_i = \{x_1, x_{r+1+i}\}$, gdzie $i \in \{1, 2, ..., (l-1)(r+1)\}$. Oznaczmy, $B_i = \{x_1, x_{r+1+i}, x_{2(r+1)+i}, x_{3(r+1)+i}, ..., x_{(l-1)(r+1)+i}\}$ dla $i = 1, 2, ..., (l - 1)(r + 1)$. Zbiory B_i są zbiorami niezależnymi wierzchołków w grafie C_n^r oraz $|B_i| = l = \alpha(C_n^r)$ dla każdego $i = 1, 2, ..., (l - 1)(r + 1)$. Zatem zbiory B_i są $\alpha(C_n^r)$-zbiorami. Łatwo zauważyć, że $A_i \subset B_i$ dla każdego $i = 1, 2, ..., (l-1)(r+1)$. Stąd wynika, że C_n^r jest grafem 2-rozszerzalnym wierzchołkowo w sensie Berge'a. Jeżeli $l = 3$ (tzn. $n = 4r+3$), to $\alpha(C_{4r+3}^r) = 3$, więc $Ext(C_{4r+3}^r) = 2$. Załóżmy, że $l \geqslant 4$. Pokażemy, że graf C_n^r nie jest k-rozszerzalny wierzchołkowo w sensie Berge'a dla żadnego $k = 3, 4, ..., l-1$. Oznaczmy, $M_j = \{x_1, x_{2r+2}, x_{4r+3}, x_{5r+4}, x_{6r+5}, ..., x_{4r+3+(r+1)j}\}$, gdzie $j \in \{0, 1, 2, ..., l-4\}$. Oczywiste jest, że zbiory M_j są zbiorami niezależnymi wierzchołków w grafie C_n^r mocy $3 + j$ dla każdego $j = 0, 1, 2, ..., l-4$. Co więcej, zbiór M_0 jest zbiorem niezależnym wierzchołków w podgrafie H indukowanym przez zbiór $X = \{x_1, x_2, ...x_{4r+3+r}\}$. Ponieważ każdy wierzchołek zbioru $X - M_0$ sąsiaduje z wierzchołkiem zbioru M_0 w grafie H, to zbiór M_0 nie jest podzbiorem żadnego $\alpha(H)$-zbioru. Zatem dowolny zbiór niezależny wierzchołków w grafie C_n^r zawierający zbiór M_0 ma moc nie większą niż $l-1$ ponieważ $|M_0| + \alpha(C_n^r - X) = 3 + \alpha(P_{n-(5r+3)}^r) = 3 + \lfloor \frac{n-5r-3}{r+1} \rfloor = l-1$ dla $n = l(r+1)+r$. Skoro $\alpha(C_n^r) = l$, to żaden ze zbiorów M_j dla $j = 0, 1, 2, ..., l-4$ nie da się rozszerzyć do $\alpha(C_n^r)$-zbioru. Stąd wynika, że graf C_n^r nie jest k-rozszerzalny wierzchołkowo w sensie Berge'a dla żadnego $k = 3 + j$, gdzie $j = 0, 1, ..., l-4$. Pamiętając, że C_n^r jest grafem 1-rozszerzalnym wierzchołkowo w sensie Berge'a wnioskujemy, że $Ext(C_n^r) = 2$ dla $n = l(r+1) + r$ oraz $l \geqslant 3$.

Przypadek 2. $n \neq l(r+1)+r$ dla $l \geqslant 3$ oraz $n \notin A$. Jeżeli $l = 2$, tzn. $n \in \{2(r+1), 2(r+1)+1, 2(r+1)+2, ..., 2(r+1)+r\}$, to $\alpha(C_n^r) - 1 = 1$, więc $Ext(C_n^r) = 1$. Załóżmy, że $l \geqslant 3$, tzn. $n \geqslant 3(r+1)+s$, gdzie $s \in \{0, 1, 2, ..., r-1\}$. Oznaczmy, $M'_t = \{x_1, x_{2r+2}, x_{3r+3}, x_{4r+4}, ..., x_{2r+2+(r+1)t}\}$ dla $t = 0, 1, 2, ..., l-3$ oraz $X' = \{x_1, x_2, ..., x_{2r+2+r}, x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-(r-1)}\}$. Analogiczne jak w Przypadku 1 otrzymujemy, że dowolny nadzbiór niezależny zbioru M'_t w grafie C_n^r ma moc nie większą niż $l-1$ ponieważ $|M'_0| + \alpha(C_n^r - X') = 2 + \alpha(P_{n-(4r+2)}^r) = 2 + \lfloor \frac{n-4r-2}{r+1} \rfloor = l-1$ oraz $n \geqslant 3(r+1)+s$, gdzie $s \in \{0, 1, 2, ..., r-1\}$. Skoro $\alpha(C_n^r) = l$, to żaden ze zbiorów M'_t dla $t = 0, 1, 2, ..., l-3$ nie da się rozszerzyć do $\alpha(C_n^r)$-zbioru. Stąd wynika, że graf C_n^r nie jest k-rozszerzalny wierzchołkowo w sensie Berge'a dla żadnego $k = 2+t$, gdzie $t = 0, 1, ..., l-3$. Pamiętając, że C_n^r jest grafem 1-rozszerzalnym wierzchołkowo w sensie Berge'a wnioskujemy, że $Ext(C_n^r) = 1$ dla $n \neq l(r+1)+r$ $(l \geqslant 3)$ oraz $n \notin A$, co kończy dowód części 1 tezy twierdzenia.

Dowód części 2. Załóżmy, że $r \leqslant \frac{n}{2} - 1$ $(n \in A)$ albo, że $r \geqslant \frac{n}{2}$. Wówczas łatwo zauważyć, że $\alpha(C_n^r) = 1$. Zatem z Własności 3.2.1 (str. 44) wynika, że graf C_n^r nie jest k-rozszerzalny wierzchołkowo w sensie Berge'a dla żadnego $k \geqslant 1$, co kończy dowód części 2 oraz dowód twierdzenia.

■

Przedstawię wyniki dotyczące rozszerzalności wierzchołkowej w sensie Berge'a grafu $G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ zwanego złączeniem n grafów (definicja str. 12). O. T. George oraz M. R. Sridharan w pracy [13] rozważali złączenie dwóch grafów $G_1 + G_2$ i udowodnili

Twierdzenie 3.2.4. (O. T. George, M. R. Sridharan [13])
Jeżeli G_1 i G_2 są B-grafami, to G_1+G_2 jest B-grafem wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha(G_1) = \alpha(G_2)$.

Prowadząc dowód indukcyjny i wykorzystując metodę dowodzenia z tej pracy można udowodnić

Lemat 3.2.5. *Niech $I \subset V(G_1 + G_2 + \cdots + G_n)$ dla $n \geqslant 2$. Zbiór I jest zbiorem niezależnym wierzchołków w grafie $G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki indeks $i \in \{1, 2, ..., n\}$, że I jest zbiorem niezależnym wierzchołków w grafie G_i.*

Wniosek 3.2.1. $\alpha(G_1 + G_2 + \cdots + G_n) = \max\{\alpha(G_i) : \quad i \in \{1, 2, ..., n\}\}$.

Wniosek 3.2.2. *$\alpha(G_1 + G_2 + \cdots + G_n) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha(G_i) = 1$ dla każdego $i = \{1, 2, ..., n\}$, tzn., gdy G_i jest grafem pełnym dla każdego $i = \{1, 2, ..., n\}$.*

Twierdzenie 3.2.6. *Niech $Ext(G_i) = k$ dla $i = 1, 2, ..., n$ $(k \geqslant 1)$. Wówczas $Ext(G_1 + G_2 + \cdots + G_n) = k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha(G_1) = \alpha(G_2) = \cdots = \alpha(G_n)$.*

Dowód. Załóżmy, że $Ext(G_1 + G_2 + \cdots + G_n) = k$ oraz $Ext(G_i) = k$ dla $i = 1, 2, ..., n$ $(k \geqslant 1)$. Udowodnimy, że $\alpha(G_1) = \alpha(G_2) = \cdots = \alpha(G_n)$. Idea dowodu jest zaczerpnięta z pracy [13]. Przypuśćmy, że istnieją dwa różne $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ takie, że $\alpha(G_i) \neq \alpha(G_j)$. Wtedy $\alpha(G_i) > \alpha(G_j)$ albo $\alpha(G_i) < \alpha(G_j)$. Niech bez straty ogólności $\alpha(G_i) > \alpha(G_j)$. Wówczas z Wniosku 3.2.1 wynika, że $\alpha(G_1 + \cdots + G_n) \geqslant \alpha(G_i) > \alpha(G_j)$. Udowodnimy teraz, że $G_1 + \cdots G_n$ nie jest grafem k-rozszerzalnym wierzchołkowo w sensie Berge'a. Oznaczmy przez I_{G_j} zbiór niezależny wierzchołków mocy k w grafie G_j (istnienie takiego zbioru wynika z założenia, że $Ext(G_j) = k$). Z definicji złączenia n grafów wynika, że wszystkie wierzchołki zbioru $V(G_1+\cdots+G_n) - V(G_j)$ sąsiadują ze wszystkimi wierzchołkami zbioru I_{G_j}. Stąd wynika, że zbiór I_{G_j} może być podzbiorem właściwym tylko $\alpha(G_j)$-zbioru w grafie $G_1 + \cdots + G_n$. Skoro jednak $\alpha(G_j) < \alpha(G_i) \leqslant \alpha(G_1 + \cdots + G_n)$, to żaden $\alpha(G_j)$-zbiór nie jest $\alpha(G_1 + \cdots + G_n)$-zbiorem. Zatem $G_1 + \cdots + G_n$ nie jest grafem k-rozszerzalnym wierzchołkowo w sensie Berge'a, więc $Ext(G_1 + G_2 + \cdots + G_n) \neq k$, co jest sprzeczne z założeniem.

Załóżmy, że $\alpha(G_1) = \alpha(G_2) = \cdots = \alpha(G_n)$ oraz, że $Ext(G_i) = k$ dla $i = 1, 2, ..., n$ $(k \geqslant 1)$. Wykażemy, że $Ext(G_1 + G_2 + \cdots + G_n) = k$ tzn., że każdy zbiór niezależny wierzchołków mocy k w grafie $G_1 + \cdots + G_n$ zawiera się w $\alpha(G_1 + \cdots + G_n)$-zbiorze oraz, że zbiór niezależny wierzchołków mocy większej niż k w grafie $G_1 + \cdots + G_n$ nie da się rozszerzyć do $\alpha(G_1 + \cdots + G_n)$-zbioru. Oznaczmy przez I dowolny zbiór niezależny wierzchołków w grafie $G_1 + \cdots + G_n$. Niech $|I| = k$. Wówczas z Lematu 3.2.5 wynika, że istnieje $i \in \{1, 2, ..., n\}$ takie, że $I \subset V(G_i)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $i = 1$, czyli, że $I \subset V(G_1)$ oraz I jest zbiorem niezależnym wierzchołków w grafie G_1. Założenie $Ext(G_i) = k$ dla $i = 1, 2, ..., n$ gwarantuje, że zbiór I jest podzbiorem pewnego $\alpha(G_1)$-zbioru, powiedzmy I_{G_1}. Poza tym, z Wniosku 3.2.1 oraz z założenia, że $\alpha(G_1) = \alpha(G_2) = \cdots = \alpha(G_n)$ wynika równość $\alpha(G_1 + \cdots + G_n) = \alpha(G_1)$. Ponieważ zbiór wierzchołków grafu $G_1 + \cdots + G_n$ jest sumą rozłączną zbiorów $V(G_i)$ dla $i = 1, 2, ..., n$, to z powyższych obserwacji wynika, że zbiór I_{G_1} jest $\alpha(G_1 + \cdots + G_n)$-zbiorem zawierającym zbiór I, co dowodzi nierówności $Ext(G_1 + G_2 + \cdots + G_n) \geqslant k$. Aby wykazać równość $Ext(G_1 + G_2 + \cdots + G_n) = k$ przypuśćmy, że $Ext(G_1 + G_2 + \cdots + G_n) = l > k$. Wtedy każdy zbiór niezależny mocy l w grafie $G_1 + \cdots + G_n$ jest podzbiorem pewnego $\alpha(G_1 + \cdots + G_n)$-zbioru. Niech I_l będzie dowolnym l-wierzchołkowym zbiorem niezależnym w grafie $G_1 + \cdots + G_n$. Wtedy z definicji liczby rozszerzalności wierzchołkowej w sensie Berge'a wynika, że $\alpha(G_1 + \cdots + G_n) > |I_l| = l > k$. Z Lematu 3.2.5 wynika, że istnieje $j \in \{1, 2, ..., n\}$ takie, że I_l jest zbiorem niezależnym wierzchołków w grafie G_j. Natomiast z założenia, że $\alpha(G_1) = \alpha(G_2) = \cdots = \alpha(G_n)$ oraz z Wniosku 3.2.1 wynika, że $\alpha(G_1 + \cdots + G_n) = \alpha(G_j)$. Zatem dowolny l-wierzchołkowy zbiór niezależny, I_l, w grafie G_j jest podzbiorem pewnego $\alpha(G_j)$-zbioru, co oznacza, że graf G_j jest l-rozszerzalny wierzchołkowo w sensie Berge'a. Skoro $l > k$, to mamy sprzeczność z założeniem, że $Ext(G_j) = k$. Ostatecznie $Ext(G_1 + G_2 + \cdots + G_n) = k$, co należało wykazać.

■

Powyższe twierdzenie pozwala tworzyć grafy k-rozszerzalne wierzchołkowo w sensie Berge'a ze znanych grafów k-rozszerzalnych wierzchołkowo w tym sensie oraz wyznaczać ich liczby rozszerzalności wierzchołkowej. Dla przykładu:
$Ext(P_{2l_1} + P_{2l_2} + \cdots + P_{2l_n}) = 1$, gdzie $l_i \geqslant 2$ dla każdego $i = 1, 2, ..., n$;

$Ext(C_{2m_1+1} + C_{2m_2+1} + \cdots + C_{2m_n+1}) = 2$, gdzie $m_j \geqslant 3$ dla każdego $j = 1, 2, ..., n$;
$Ext(P_{2l_1} + P_{2l_2} + \cdots + P_{2l_r} + C_{2m_1} + C_{2m_2} + \cdots + C_{2m_s}) = 1$, gdzie $l_i \geqslant 2$ dla każdego $i = 1, 2, ..., r$ oraz $m_j \geqslant 2$ dla każdego $j = 1, 2, ..., s$.

Obserwacja 3.2.1. *Jeżeli istnieje $i, 1 \leqslant i \leqslant n$ takie, że $G_i \cong K_r$ dla $r \geqslant 1$, to graf $G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ nie jest grafem 1-rozszerzalnym wierzchołkowo w sensie Berge'a.*

Dowód. Dla dowodu wystarczy zauważyć, że dowolny wierzchołek zbioru $V(G_i)$, gdzie $G_i \cong K_r$, jest wierzchołkiem uniwersalnym grafu $G_1 + G_2 + \cdots + G_n$, więc z Własności 3.2.3 (str. 46) wynika, że $G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ nie jest grafem 1-rozszerzalnym wierzchołkowo w sensie Berge'a.

■

Twierdzenie 3.2.7. *Niech $k \geqslant 2$ oraz $r \geqslant 1$. Wówczas $Ext(K_r + G) = k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Ext(G) = k$.*

Dowód. Niech $k \geqslant 2$ oraz $r \geqslant 1$. Załóżmy, że $Ext(K_r + G) = k$. Pokażemy, że G jest grafem k-rozszerzalnym wierzchołkowo w sensie Berge'a. Oznaczmy przez I dowolny zbiór niezależny wierzchołków w grafie G. Niech $|I| = k$. Wtedy z Lematu 3.2.5 (str. 49) wynika, że I jest zbiorem niezależnym wierzchołków w grafie $K_r + G$. Ponieważ z założenia $K_r + G$ jest grafem k-rozszerzalnym, to $I \subset I_{K_r+G}$, gdzie I_{K_r+G} jest $\alpha(K_r + G)$-zbiorem oraz $\alpha(K_r + G) > |I| = k$. Co więcej, z założenia, że $k \geqslant 2$ otrzymujemy $\alpha(K_r + G) > 2$. Ponieważ $\alpha(K_r) = 1$, to z Wniosku 3.2.1 (str. 49) wynika równość $\alpha(K_r + G) = \alpha(G)$. Korzystając ponownie z Lematu 3.2.5 otrzymujemy, że I_{K_r+G} jest $\alpha(G)$-zbiorem zawierającym zbiór I. Oznacza to, że G jest grafem k-rozszerzalnym, czyli że $Ext(G) \geqslant k$. Aby wykazać równość $Ext(G) = k$ przypuśćmy, że $Ext(G) = l > k$. Wówczas dla każdego zbioru niezależnego wierzchołków $I_l \subset V(G)$ istniałby $\alpha(G)$-zbiór I_G taki, że $I_l \subset I_G$. Ponieważ $\alpha(K_r) = 1$ oraz $k \geqslant 2$, to z Lematu 3.2.5 wynika, że wszystkie zbiory niezależne o l wierzchołkach w grafie $K_r + G$ są zawarte w zbiorze $V(G)$. Co więcej, z Wniosku 3.2.1 otrzymujemy równość $\alpha(G) = \alpha(K_r + G)$. Zatem zbiór I_l jest podzbiorem $\alpha(K_r + G)$-zbioru I_G, więc $K_r + G$ jest grafem l-rozszerzalnym wierzchołkowo w sensie Berge'a. Ponieważ $l > k$, to mamy sprzeczność z założeniem, że $Ext(K_r + G) = k$. Ostatecznie $Ext(G) = k$.

Dowód implikacji w drugą stronę przebiega analogicznie jak wyżej. Wystarczy zamienić rolami graf $K_r + G$ z grafem G.

■

3.3. Zależności między klasami grafów rozszerzalnych w sensie Berge'a a klasą grafów rozszerzalnych w sensie Plummera

W pracy [13] autorzy rozważali B-grafy i B^*-grafy, a także B^{**}-grafy, czyli grafy, które są jednocześnie B- i B^*-grafami. Rozważania te stanowiły dla mnie motywację do zdefiniowania następujących podklas $\mathcal{A}_i$ dla $i = 1, 2, 3, 4, 5$ klasy

$$\Omega \stackrel{def}{=} \{G : \quad ext(G) \geqslant 0 \quad \vee \quad ext^*(G) \geqslant 1 \quad \vee \quad Ext(G) \geqslant 1\}, \text{ gdzie}$$

$$\mathcal{A}_1 \stackrel{def}{=} \{G \in \Omega : \quad ext^*(G) = ext(G)\},$$

$$\mathcal{A}_2 \stackrel{def}{=} \{G \in \Omega : \quad Ext(G) = ext(G)\},$$

$$\mathcal{A}_3 \stackrel{def}{=} \{G \in \Omega : \quad Ext(G) = ext^*(G)\},$$

$$\mathcal{A}_4 \stackrel{def}{=} \{G \in \Omega : \quad Ext(G) = ext^*(G) = ext(G)\} \text{ oraz}$$

$$\mathcal{A}_5 \stackrel{def}{=} \Omega - \bigcup_{i=1}^{4} \mathcal{A}_i.$$

Podam przykłady grafów należących do klas $\mathcal{A}_i$ dla $i = 1, 2, 3, 4, 5$ oraz zbadam zależności między tymi klasami. Wyniki zamieszczone w tym rozdziale i w Rozdziale 2 pokazują, że żadna z powyższych klas nie jest pusta. Mianowicie grafy C_{2n} dla $n \geqslant 2$ należą do klasy $\mathcal{A}_i$ dla każdego $i = 1, 2, 3, 4$ (Przykład 2.1.1, str. 17; Twierdzenie 3.1.2, str. 36; Twierdzenie 3.2.2, str. 47). Co więcej, istnieją grafy, które należą do klasy $\mathcal{A}_5$, na przykład grafy P_n dla $n \geqslant 2$ (Przykład 2.1.2, str. 17; Twierdzenie 3.1.1, str. 35; Twierdzenie 3.2.1, str. 46).

Twierdzenie 3.3.1. *Niech $\beta(G) = \frac{1}{2}|V(G)|$. Wówczas G jest grafem k-rozszerzalnym w sensie Plummera dla $k \geqslant 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grafem k-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a.*

Dowód. Niech $\beta(G) = \frac{1}{2}|V(G)|$. Załóżmy, że graf G jest grafem k-rozszerzalnym w sensie Plummera dla $k \geqslant 1$. Pokażemy, że G jest grafem k-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a. Niech zbiór A będzie dowolnym skojarzeniem mocy k w grafie G. Z założenia otrzymujemy, $A \subset M_G$, gdzie M_G jest pewnym skojarzeniem doskonałym w grafie G. Ponieważ $\beta(G) = \frac{1}{2}|V(G)| = |M_G|$, to M_G jest $\beta(G)$-zbiorem zawierającym skojarzenie A, co dowodzi k-rozszerzalność krawędziową w sensie Berge'a grafu G. Załóżmy teraz, że G jest grafem k-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a. Z definicji grafu k-rozszerzalnego krawędziowo w sensie Berge'a wynika, że $k \geqslant 1$. Pokażemy, że G jest grafem k-rozszerzalnym w sensie Plummera. Z faktu, że $\beta(G) = \frac{1}{2}|V(G)|$ wynika (jak wyżej), iż każdy $\beta(G)$-zbiór jest skojarzeniem doskonałym w grafie G. Stąd i z założenia, że G jest grafem k-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a otrzymujemy, iż każde skojarzenie w grafie G, zawierające k krawędzi, jest podzbiorem skojarzenia doskonałego w tym grafie. To oznacza, że G jest grafem k-rozszerzalnym w sensie Plummera dla $k \geqslant 1$, co należało udowodnić.

■

Wniosek 3.3.1. $\mathcal{A}_1 = \{G \in \Omega : \quad ext(G) \geqslant 1\}$.

Dowód. Niech $G \in \{G \in \Omega : \quad ext^*(G) = ext(G)\}$. Pokażemy, że $G \in \{G \in \Omega : ext(G) \geqslant 1\}$. Wystarczy przypomnieć, iż $ext^*(G) \geqslant 1$, co wynika z definicji indeksu rozszerzalności krawędziowej w sensie Berge'a grafu G. Zatem równość $ext^*(G) = ext(G)$ implikuje $ext(G) \geqslant 1$, czyli $G \in \{G \in \Omega : \quad ext(G) \geqslant 1\}$. Niech teraz $G \in \{G \in \Omega : \quad ext(G) \geqslant 1\}$. Pokażemy, że $G \in \{G \in \Omega : \quad ext^*(G) = ext(G)\}$. Załóżmy, że $ext^*(G) \neq ext(G)$, tzn. $ext^*(G) < ext(G)$ albo $ext^*(G) > ext(G)$. Bez straty ogólności załóżmy, że $ext^*(G) < ext(G)$. Oznaczmy, $ext(G) = k$. Wówczas G jest grafem k-rozszerzalnym w sensie Plummera oraz z założenia, że $G \in \{G \in \Omega : \quad ext(G) \geqslant 1\}$ wynika, że $k \geqslant 1$. Z definicji indeksu rozszerzalności w sensie Plummera grafu G wynika dodatkowo, iż graf ten zawiera skojarzenie doskonałe, więc $\beta(G) = \frac{1}{2}|V(G)|$. Zatem na podstawie Twierdzenia 3.3.1, G jest grafem k-rozszerzalnym krawędziowo w sensie Berge'a, czyli $ext^*(G) \geqslant k$, co jest sprzeczne z założeniem, że $ext^*(G) < ext(G)$. Ostatecznie $\mathcal{A}_1 = \{G \in \Omega : \quad ext(G) \geqslant 1\}$, co należało udowodnić.

■

Wprost z definicji klas $\mathcal{A}_i$ dla $i = 1, 2, 3, 4$ wynikają następujące inkluzje

Wniosek 3.3.2. $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_3$ *oraz* $\mathcal{A}_4 \subset \mathcal{A}_i$ *dla każdego* $i = 1, 2, 3$.

Z Przykładu 2.1.3 (str. 17) oraz Wniosku 3.3.1 wynika, że graf K_{2n} dla $n \geqslant 1$ należy do klasy $\mathcal{A}_1$ ale nie należy do klasy $\mathcal{A}_2$, ponieważ K_{2n} nie spełnia warunku koniecznego k-rozszerzalności wierzchołkowej w sensie Berge'a (Własność 3.2.1, str. 45). Zatem $\mathcal{A}_2 \neq \mathcal{A}_1$.
Z Twierdzenia 3.1.2 (str. 36) i Twierdzenia 3.2.2 (str. 47) wynika, że graf C_{2n+1} dla $n \geqslant 3$ należy do klasy $\mathcal{A}_3$ ale nie należy do klasy $\mathcal{A}_2$, ponieważ C_{2n+1} nie spełnia warunku koniecznego k-rozszerzalności w sensie Plummera (Własność 2.1.1, str. 14). Zatem $\mathcal{A}_2 \neq \mathcal{A}_3$.
Ponadto, łatwo zauważyć, że dla dowolnego grafu G z równości $Ext(G) = ext(G)$ wynika nierówność $ext(G) \geqslant 1$. Zatem z Wniosku 3.3.1 i Wniosku 3.3.2 wynika

Wniosek 3.3.3. $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_3$.

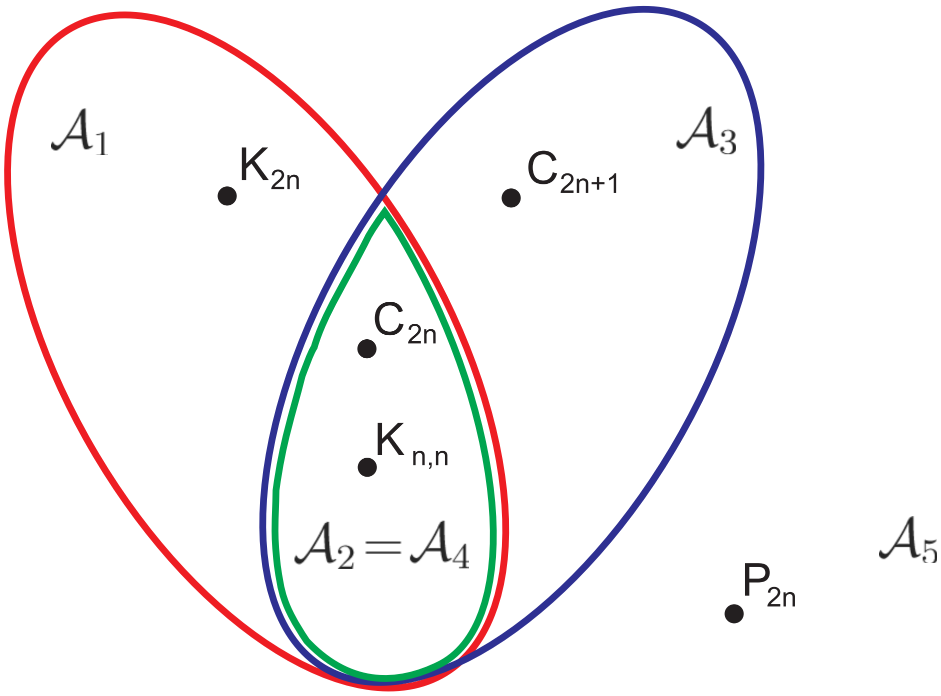
Z powyższego wniosku otrzymujemy, że $\bigcup_{i=1}^{4} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_3$. Zatem $\mathcal{A}_5 = \Omega - (\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_3) = (\Omega - \mathcal{A}_1) \cup (\Omega - \mathcal{A}_3)$. Z Wniosku 3.3.1 oraz z definicji klasy $\mathcal{A}_3$ mamy

Wniosek 3.3.4. $\mathcal{A}_5 = \{G \in \Omega : \quad ext(G) = 0 \quad \vee \quad Ext(G) \neq ext^*(G)\}$.

Przypomnijmy, że $Ext(L(G)) = ext^*(G)$ (wzór (3.1), str. 46). Zatem graf G, dla którego $L(G) \cong G$ należy do klasy $\mathcal{A}_3$. Jeżeli dodatkowo założymy, że zachodzi nierówność $ext(G) \geqslant 1$, to z Wniosku 3.3.1 otrzymamy

Wniosek 3.3.5. $\{G \in \Omega : \quad L(G) \cong G\} \subset \mathcal{A}_3$ *oraz*
$\{G \in \Omega : \quad L(G) \cong G \quad \wedge \quad ext(G) \geqslant 1\} \subset \mathcal{A}_2$.

Związki między klasami $\mathcal{A}_i$ dla $i = 1, 2, 3, 4, 5$ zostały zinterpretowane na Rysunku 3.4



Rysunek 3.4. Klasy grafów rozszerzalnych ($n \geqslant 2$).

Rozdział 4

Grafy rozszerzalne w sensie zbiorów prawie doskonałych i zbiorów doskonale dominujących

Przypomnę, że w pracy [8] autorzy pokazali, iż wyznaczenie mocy najmniejszego 1-maksymalnego zbioru prawie doskonałego jest problemem NP-zupełnym dla dowolnego grafu G. Podali jednak algorytm liniowy wyznaczający parametr $n_p(T)$ dla dowolnego drzewa T. Natomiast M. R. Fellows i M. N. Hoover [10] wykazali, że ustalenie, czy w grafie istnieje nietrywialny zbiór doskonale dominujący (autorzy używają nazwy "semiperfect dominating") jest problemem NP-zupełnym dla grafów planarnych. Dlatego wprowadzamy pojęcie k-rozszerzalności w sensie zbiorów prawie doskonałych i zbiorów doskonale dominujących. W części pierwszej tego rozdziału udowodnimy szereg własności i lematów dotyczących 1-maksymalnych zbiorów prawie doskonałych i 1-maksymalnych zbiorów doskonale dominujących. Wyniki te zostaną wykorzystane w części drugiej tego rozdziału poświęconej zależnościom między rozszerzalnością grafu w sensie zbiorów prawie doskonałych a rozszerzalnością grafu w sensie zbiorów doskonale dominujących oraz w części trzeciej tego rozdziału dotyczącej rozszerzalności specjalnych klas grafów.

4.1. Własności zbiorów prawie doskonałych i doskonale dominujących

Ponieważ definicje zbiorów prawie doskonałych i doskonale dominujących oraz liczb z nimi związanych znajdują się na początku pracy (str. 11,12) przypomnimy je, gdyż będziemy z nich często korzystać w tej części rozdziału. Mówimy, że podzbiór $S \subseteq V(G)$ jest zbiorem prawie doskonałym w grafie G (krótko: np-zbiorem w grafie G), jeżeli każdy wierzchołek $u \in V(G) - S$ ma co najwyżej jednego sąsiada w zbiorze S ([5]). Zbiór $S \subset V(G)$ nazywamy zbiorem doskonale dominującym w grafie G (krótko: pd-zbiorem w G), jeżeli każdy wierzchołek $u \in V(G) - S$ ma dokładnie jednego sąsiada w zbiorze S ([5]). Np-zbiór (pd-zbiór) S w grafie G nazywamy 1-maksymalnym np-zbiorem (pd-zbiorem), jeżeli dla dowolnego wierzchołka $u \in V(G) - S$, zbiór $S \cup \{u\}$ nie jest np-zbiorem (pd-zbiorem) w grafie G. Moc najmniejszego 1-maksymalnego np-zbioru w grafie G oznaczamy przez $n_p(G)$, a 1-maksymalny np-zbiór mocy $n_p(G)$ będziemy nazywać $n_p(G)$-zbiorem. 1-maksymalne np-zbiory oraz parametr $n_p(G)$ zostały zdefiniowane w pracy [5]. Moc najmniejszego pd-zbioru w grafie G oznaczamy przez $\gamma_p(G)$, jak w pracy [5]. Moc najmniejszego 1-maksymalnego pd-zbioru w grafie G oznaczamy przez $p_d(G)$, a 1-maksymalny pd-zbiór mocy $p_d(G)$ będziemy nazywać $p_d(G)$-zbiorem. W pracy [8] udowodnione zostały następujące własności zbiorów prawie doskonałych:

Własność 4.1.1. (J. E. Dunbar, F. C. Harris i inni [8])
Zbiór prawie doskonały S w grafie G jest 1-maksymalny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek $u \in V(G) - S$ ma sąsiada $v \neq u$, $v \in V(G) - S$, który jest sąsiedni z dokładnie jednym wierzchołkiem zbioru S.

Własność 4.1.2. (J. E. Dunbar, F. C. Harris i inni [8])
Niech G będzie drogą lub cyklem o co najmniej czterech wierzchołkach oraz niech S będzie podzbiorem zbioru wierzchołków grafu G. Wówczas S jest 1-maksymalnym zbiorem prawie doskonałym w G wtedy i tylko wtedy, gdy

(i) podgraf indukowany przez zbiór $V(G) - S$ jest sumą rozłączną grafów K_2, oraz
(ii) każdy wierzchołek zbioru $V(G) - S$ ma w zbiorze S dokładnie jednego sąsiada.

Własność 4.1.3. (J. E. Dunbar, F. C. Harris i inni [8])
Dla dowolnego grafu G, $n_p(G) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wierzchołek $u \in V(G)$ taki, że dla każdego wierzchołka $v \neq u$ istnieje droga długości dwa łącząca u i v w grafie G.

Własność 4.1.4. (J. E. Dunbar, F. C. Harris i inni [8])
Jeżeli P_n jest drogą o n wierzchołkach, to

$$n_p(P_n) = \begin{cases} l+2 & \textit{dla} \quad n = 3l, \\ l+1 & \textit{dla} \quad n = 3l+1, \\ l+2 & \textit{dla} \quad n = 3l+2. \end{cases}$$

Własność 4.1.5. (J. E. Dunbar, F. C. Harris i inni [8])
Jeżeli C_n jest cyklem o n wierzchołkach, to

$$n_p(C_n) = \begin{cases} l & \textit{dla} \quad n = 3l, \\ l+1 & \textit{dla} \quad n = 3l+1, \\ l+2 & \textit{dla} \quad n = 3l+2. \end{cases}$$

Przedstawię kilka własności opisujących związki między 1-maksymalnymi zbiorami prawie doskonałymi i 1-maksymalnymi zbiorami doskonale dominującymi oraz między liczbami z nimi związanymi.

Własność 4.1.6. *Jeżeli S jest 1-maksymalnym np-zbiorem doskonale dominującym w grafie G, to S jest 1-maksymalnym pd-zbiorem w grafie G.*

Dowód. Niech S będzie dowolnym 1-maksymalnym zbiorem prawie doskonałym, krótko: np-zbiorem oraz zbiorem doskonale dominującym, krótko: pd-zbiorem w grafie G. Pokażemy, że S jest 1-maksymalnym pd-zbiorem w grafie G. Z definicji 1-maksymalnego np-zbioru w grafie G wynika, że dla każdego wierzchołka $u \in V(G)-S$, $S \cup \{u\}$ nie jest np-zbiorem w tym grafie. Stąd wynika, że dla każdego wierzchołka $u \in V(G) - S$ istnieje wierzchołek $v \in V(G) - (S \cup \{u\})$, który ma więcej niż jednego sąsiada w zbiorze $S \cup \{u\}$. Zatem $S \cup \{u\}$ nie jest pd-zbiorem w grafie G dla każdego wierzchołka $u \in V(G) - S$. To oznacza, że S jest 1-maksymalnym pd-zbiorem w grafie G, co kończy dowód.

■

Własność 4.1.7. *Jeżeli S jest 1-maksymalnym pd-zbiorem w grafie G, to S jest 1-maksymalnym np-zbiorem w grafie G.*

Dowód. Niech S będzie dowolnym 1-maksymalnym pd-zbiorem w grafie G. Udowodnimy, że S jest 1-maksymalnym np-zbiorem w tym grafie. Z definicji 1-maksymalnego pd-zbioru w grafie G wynika, że dla każdego wierzchołka $u \in V(G)-S$, $S \cup \{u\}$ nie jest pd-zbiorem w G. Stąd wynika, że dla każdego wierzchołka $u \in V(G)-S$ istnieje wierzchołek $v \in V(G)-(S \cup \{u\})$ taki, że $N_G(v) \cap (S \cup \{u\}) = \emptyset$ albo $|N_G(v) \cap (S \cup \{u\})| \geqslant 2$. Jeżeli $N_G(v) \cap (S \cup \{u\}) = \emptyset$, to dla każdego wierzchołka $u \in V(G) - S$ istnieje wierzchołek $v \in V(G) - S$ taki, że $uv \notin E(G)$ oraz $N_G(v) \cap S = \emptyset$. Dlatego też S nie jest pd-zbiorem w grafie G. To przeczy założeniu, że S jest 1-maksymalnym pd-zbiorem w G. Zatem $|N_G(v) \cap (S \cup \{u\})| \geqslant 2$. Wówczas $S \cup \{u\}$ nie jest np-zbiorem w grafie G dla żadnego $u \in V(G) - S$. W konsekwencji, S jest 1-maksymalnym np-zbiorem w grafie G, co należało pokazać.

■

Własność 4.1.8. *Wszystkie wierzchołki wiszące grafu G należą do każdego 1-maksymalnego pd-zbioru w grafie G.*

Dowód. Niech S będzie dowolnym 1-maksymalnym pd-zbiorem w grafie G oraz niech u będzie dowolnym wierzchołkiem wiszącym grafu G. Udowodnimy, że $u \in S$. Przypuśćmy, że $u \notin S$. Wtedy istnieje dokładnie jeden wierzchołek v w grafie G, który jest sąsiedni z wierzchołkiem u. Ponieważ S jest pd-zbiorem w grafie G, to $v \in S$ oraz $N_G(u) - S = \emptyset$. Stąd otrzymujemy $S \cup \{u\}$ jest pd-zbiorem w G, co jest sprzeczne z założeniem, że S jest 1-maksymalnym pd-zbiorem w G.

■

Własność 4.1.9. *Dla dowolnego grafu spójnego G o co najmniej trzech wierzchołkach, $p_d(G) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma_p(G) = 1$ i $\delta(G) \geqslant 2$.*

Dowód. Niech G będzie grafem, w którym $|V(G)| \geqslant 3$. Załóżmy, że $p_d(G) = 1$. Wtedy $\gamma_p(G) = 1$ (z definicji liczb $p_d(G)$ oraz $\gamma_p(G)$). Wykażemy, że $\delta(G) \geqslant 2$. Przypuśćmy, że $\delta(G) < 2$. Ponieważ G jest grafem spójnym, to $\delta(G) = 1$. Zatem w grafie G istnieje wierzchołek wiszący, powiedzmy $u \in V(G)$. Z Własności 4.1.8 wynika, że u należy do każdego 1-maksymalnego pd-zbioru w grafie G. Jednak $p_d(G) = 1$, więc zbiór $\{u\}$ jest

$p_d(G)$-zbiorem, tzn. $G \cong K_2$, co jest sprzeczne z założeniem, że $|V(G)| \geqslant 3$. Zatem $\delta(G) \geqslant 2$.

Załóżmy teraz, że $\gamma_p(G) = 1$ oraz $\delta(G) \geqslant 2$. Pokażemy, że $p_d(G) = 1$. Z założenia, że $\gamma_p(G) = 1$ wynika, iż istnieje pd-zbiór mocy 1 w grafie G, powiedzmy $\{u\}$. Zatem u jest sąsiedni z każdym wierzchołkiem v zbioru $V(G) - \{u\}$. Ponieważ $\delta(G) \geqslant 2$, to dla dowolnego wierzchołka $v \in V(G) - \{u\}$ istnieje wierzchołek w różny od u, który jest sąsiedni z wierzchołkiem u oraz z wierzchołkiem v w grafie G. W konsekwencji, $\{u, v\}$ nie jest pd-zbiorem w G dla żadnego wierzchołka $v \in V(G) - \{u\}$, co oznacza, że $\{u\}$ jest 1-maksymalnym pd-zbiorem w grafie G, więc $p_d(G) = 1$, co należało wykazać.

■

Własność 4.1.10. *Dla dowolnego grafu G, $p_d(G) \geqslant n_p(G)$. Co więcej, $p_d(G) = n_p(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $n_p(G)$-zbiór, który jest pd-zbiorem w grafie G.*

Dowód. Udowodnimy, że $p_d(G) \geqslant n_p(G)$ dla dowolnego grafu G. Przypuśćmy, że $p_d(G) < n_p(G)$. Wtedy istnieje 1-maksymalny pd-zbiór w grafie G, powiedzmy S, taki, że $|S| = p_d(G) < n_p(G)$. Z Własności 4.1.7 wynika, że S jest 1-maksymalnym np-zbiorem w grafie G, więc $|S| \geqslant n_p(G)$, co jest sprzeczne z założeniem, że $|S| < n_p(G)$. Zatem $p_d(G) \geqslant n_p(G)$.

Załóżmy, że $p_d(G) = n_p(G)$. Pokażemy, że w grafie G istnieje $n_p(G)$-zbiór, który jest pd-zbiorem w tym grafie. Zauważmy, że równość $p_d(G) = n_p(G)$ implikuje istnienie $p_d(G)$-zbioru, powiedzmy S, mocy $n_p(G)$. Zatem $|S| = n_p(G)$ oraz S jest pd-zbiorem w grafie G. Dodatkowo, z Własności 4.1.7 wynika, że S jest również 1-maksymalnym np-zbiorem w G. Zatem S jest $n_p(G)$-zbiorem, który jest pd-zbiorem w grafie G.

Załóżmy teraz, że istnieje $n_p(G)$-zbiór, który jest pd-zbiorem w grafie G. Zauważmy, że aby wykazać, iż $p_d(G) = n_p(G)$ wystarczy pokazać, że $p_d(G) \leqslant |S| = n_p(G)$, gdyż nierówność $p_d(G) \geqslant n_p(G)$ została już udowodniona dla dowolnego grafu G. Niech S będzie $n_p(G)$-zbiorem, który jest pd-zbiorem w grafie G. Wtedy S jest 1-maksymalnym np-zbiorem w G, S jest pd-zbiorem w G oraz $|S| = n_p(G)$. Z Własności 4.1.6 (str. 57) otrzymujemy, że S jest również 1-maksymalnym pd-zbiorem w grafie G. To oznacza, że $p_d(G) \leqslant |S| = n_p(G)$, co kończy dowód.

■

Z Własności 4.1.2 (str. 56) wynika, że w grafach P_n i C_n każdy 1-maksymalny np-zbiór jest doskonale dominujący. Z Własności 4.1.10 otrzymujemy

Własność 4.1.11. *$p_d(P_n) = n_p(P_n)$ oraz $p_d(C_n) = n_p(C_n)$.*

Z definicji 1-maksymalnego pd-zbioru w grafie G wynika, że $\gamma_p(G) \leqslant p_d(G)$. Korzystając z Własności 4.1.11, Własności 4.1.4 i Własności 4.1.5 (str. 57) oraz z definicji grafów P_n i C_n nie jest trudno wykazać

Własność 4.1.12.

$$\gamma_p(P_n) = \begin{cases} l & dla \quad n = 3l, \\ l+1 & dla \quad n \neq 3l \end{cases}$$

oraz

$$\gamma_p(C_n) = p_d(C_n) = \begin{cases} l & dla \quad n = 3l, \\ l+1 & dla \quad n = 3l+1, \\ l+2 & dla \quad n = 3l+2. \end{cases}$$

Przypomnę, że symbol $X[G_1, G_2, ..., G_n]$ oznacza graf zwany X-złączeniem grafu X i ciągu grafów spójnych $(G_1, G_2, ..., G_n)$ dla $n \geqslant 2$ (definicja str. 12). Udowodnię serię lematów dotyczących zbiorów prawie doskonałych i doskonale dominujących w grafie $X[G_1, G_2, ..., G_n]$ oraz liczb z nimi związanych zakładając, że graf G_i jest spójny oraz, że $|V(G_i)| \geqslant 2$ dla każdego $i = 1, 2, ..., n$. Udowodnione poniżej twierdzenia pomocnicze będą wykorzystane do dowodów twierdzeń zamieszczonych w części 4.3 tego rozdziału.

Lemat 4.1.1. *Niech $X = P_n$ lub $X = C_n$ oraz $V(X) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Zbiór $S \subset V(X[G_1, G_2, ..., G_n])$ jest np-zbiorem w grafie $X[G_1, G_2, ..., G_n]$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

(1) *$|S \cap V(G_i)| \leqslant 1$ dla każdego $i = 1, 2, ..., n$ oraz*

(2) *dla każdych dwóch różnych $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ jeżeli $|S \cap V(G_i)| = |S \cap V(G_j)| = 1$, to $N_X[x_i] \cap N_X[x_j] = \emptyset$, gdzie $x_i, x_j \in V(X)$.*

Dowód. Niech S będzie podzbiorem właściwym zbioru $V(X[G_1, G_2, ..., G_n])$, gdzie $X = P_n$ lub $X = C_n$. Załóżmy, że S jest np-zbiorem w grafie $X[G_1, G_2, ..., G_n]$.

Pokażemy, że $|S \cap V(G_i)| \leqslant 1$ dla każdego $i = 1, 2, ..., n$. Przypuśćmy, że istnieje $i \in \{1, 2, ..., n\}$ takie, że $|S \cap V(G_i)| > 1$. Wtedy istnieje $i \in \{1, 2, ..., n\}$ takie, że $s_1, s_2 \in S \cap V(G_i)$. Z definicji grafu $X[G_1, G_2, ..., G_n]$ wynika, że każdy wierzchołek zbioru $V(G_{i+1})$ $(i \leqslant n-1)$ albo $V(G_{i-1})$ $(i = n)$ jest sąsiedni z wierzchołkami s_1, s_2 w grafie $X[G_1, G_2, ..., G_n]$ $(X = P_n$ lub $X = C_n)$.

Załóżmy, że $i = 1$. Zauważmy, że jeżeli $V(G_{i+1}) - S \neq \emptyset$, to S nie może być np-zbiorem w grafie $X[G_1, G_2, ..., G_n]$, co jest sprzeczne z założeniem. Skoro $V(G_{i+1}) - S = \emptyset$, to $V(G_{i+1}) \subset S$. Ponieważ $|V(G_{i+1})| \geqslant 2$, to otrzymujemy również, że $V(G_i) \subset S$ oraz $V(G_{i+p}) \subset S$ dla każdego $p = 2, 3, ..., n-i$. Zatem $S = V(X[G_1, G_2, ..., G_n])$, sprzeczność.

Załóżmy, że $2 \leqslant i \leqslant n-1$. Wtedy, w analogiczny sposób jak dla $i = 1$, otrzymujemy $V(G_i) \subset S$, $V(G_{i+1}) \subset S$, $V(G_{i+p}) \subset S$ dla każdego $p = 2, 3, ..., n-i$. Co więcej, można zauważyć, że $V(G_{i-q}) \subset S$ dla każdego $q = 1, 2, ..., i-1$. Zatem $S = V(X[G_1, G_2, ..., G_n])$, sprzeczność.

Załóżmy, że $i = n$. Wtedy, z tych samych powodów co zbiór $V(G_{i+1})$ dla $i = 1$, zbiór $V(G_{i-1}) \subset S$ dla $i = n$. Analogicznie jak w przypadku $2 \leqslant i \leqslant n-1$, otrzymujemy $V(G_{i-q}) \subset S$ dla każdego $q = 1, 2, ..., i-1$. Zatem $S = V(X[G_1, G_2, ..., G_n])$, sprzeczność.

Z powyższych rozważań wynika, że $|S \cap V(G_i)| \leqslant 1$ dla każdego $i = 1, 2, ..., n$, co kończy dowód części (1) lematu.

Pokażemy teraz, że dla każdych dwóch różnych $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ takich, że $|S \cap V(G_i)| = |S \cap V(G_j)| = 1$, musi zachodzić równość $N_X[x_i] \cap N_X[x_j] = \emptyset$, gdzie $x_i, x_j \in V(X)$. Oznaczmy, $\{s_i\} = S \cap V(G_i)$ oraz $\{s_j\} = S \cap V(G_j)$. Przypuśćmy, że $N_X[x_i] \cap N_X[x_j] \neq \emptyset$. Rozważymy dwa przypadki

Przypadek 1. $x_i x_j \in E(X)$. Wtedy każdy wierzchołek zbioru $V(G_i)$ jest sąsiedni z wierzchołkiem $s_j \in S \cap V(G_j)$. Ponieważ G_i jest grafem spójnym, to istnieje wierzchołek $y \in V(G_i)$, który jest sąsiedni z wierzchołkiem s_i. Stąd wynika, że y posiada co najmniej dwóch sąsiadów w zbiorze S. Jeżeli $y \notin S$, to mamy sprzeczność z założeniem, że S jest np-zbiorem w grafie $X[G_1, G_2, ..., G_n]$. Jeżeli $y \in S$, to $|S \cap V(G_i)| \geqslant 2$, co jest sprzeczne z udowodnioną wcześniej nierównością $|S \cap V(G_i)| \leqslant 1$.

Przypadek 2. $x_i x_j \notin E(X)$. Wtedy istnieje wierzchołek $x_l \in N_X(x_i) \cap N_X(x_j)$. Co więcej, każdy wierzchołek zbioru $V(G_l)$ jest sąsiedni z wierzchołkiem $s_i \in S \cap V(G_i)$ oraz z wierzchołkiem $s_j \in S \cap V(G_j)$. Jeżeli $V(G_l) - S = \emptyset$, to $V(G_i) \subset S$ i $V(G_j) \subset S$ itd. Zatem $S = V(X[G_1, G_2, ..., G_n])$, sprzeczność. Jeżeli $V(G_l) - S \neq \emptyset$, to w zbiorze $V(G_l) - S$ istnieje wierzchołek, który jest sąsiedni z wierzchołkami $s_i, s_j \in S$, sprzeczność.

Z rozważanych przypadków wynika więc, że $N_X[x_i] \cap N_X[x_j] = \emptyset$, co kończy dowód części (2) lematu.

Załóżmy, że S jest podzbiorem zbioru $V(X[G_1, G_2, ..., G_n])$ spełniającym warunek (1) i (2). Pokażemy, że S jest np-zbiorem w grafie $X[G_1, G_2, ..., G_n]$. Niech $z \in V(X[G_1, G_2, ..., G_n]) - S$. Bez straty ogólności załóżmy, że $z \in V(G_l)$, gdzie $1 < l < n$.

Z definicji X-złączenia wynika, że $N_{X[G_1,G_2,...,G_n]}(z) = N_{G_l}(z) \cup V(G_{l-1}) \cup V(G_{l+1})$. Zatem $N_{X[G_1,G_2,...,G_n]}(z) \cap S = (V(G_{l-1}) \cup V(G_l) \cup V(G_{l+1})) \cap S$. Ale dla dowolnych dwóch różnych $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ takich, że $|S \cap V(G_i)| = |S \cap V(G_j)| = 1$ mamy $N_X[x_i] \cap N_X[x_j] = \emptyset$, gdzie $x_i, x_j \in V(X)$, co wynika z przyjętego założenia. Stąd wynika, że $N_{X[G_1,G_2,...,G_n]}(z) \cap S = N_{G_{l-1}}(z) \cap S$ lub $N_{X[G_1,G_2,...,G_n]}(z) \cap S = N_{G_l}(z) \cap S$ lub $N_{X[G_1,G_2,...,G_n]}(z) \cap S = N_{G_{l+1}}(z) \cap S$. Ponieważ $|S \cap V(G_i)| \leqslant 1$ dla każdego $i = 1, 2, ..., n$, to $|N_{X[G_1,G_2,...,G_n]}(z) \cap S| \leqslant 1$, co oznacza, że S jest np-zbiorem w grafie $X[G_1, G_2, ..., G_n]$ i kończy dowód lematu.

■

Wniosek 4.1.1. *Niech $X = P_n$ lub $X = C_n$ oraz $V(X) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Jeżeli $S \subset V(X[G_1, G_2, ..., G_n])$ oraz S jest pd-zbiorem w grafie $X[G_1, G_2, ..., G_n]$, to*

(1) *$|S \cap V(G_i)| \leqslant 1$ dla każdego $i = 1, 2, ..., n$ oraz*

(2) *dla każdych dwóch różnych $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ jeżeli $|S \cap V(G_i)| = |S \cap V(G_j)| = 1$, to $N_X[x_i] \cap N_X[x_j] = \emptyset$, gdzie $x_i, x_j \in V(X)$ oraz*

(3) *dla każdego $i = 1, 2, ..., n$ jeżeli $|S \cap V(G_i)| = 1$, to $\gamma_p(G_i) = 1$.*

Dowód. Załóżmy, że S jest zbiorem doskonale dominującym w grafie $X[G_1, G_2, ..., G_n]$. Ponieważ każdy zbiór doskonale dominujący jest zbiorem prawie doskonałym w dowolnym grafie, więc z Lematu 4.1.1 wynika warunek (1) i (2). Pozostaje wykazać warunek (3). Załóżmy, że $S \cap V(G_i) \neq \emptyset$. Niech $s_i \in S \cap V(G_i)$. Wtedy $|S \cap V(G_i)| = 1$ oraz $S \cap V(G_{i-1}) = S \cap V(G_{i+1}) = \emptyset$, na podstawie warunków (1) i (2). Zatem $\{s_i\}$ jest pd-zbiorem w grafie G_i, gdyż w przeciwnym wypadku S nie byłby pd-zbiorem w $X[G_1, G_2, ..., G_n]$ ($X = P_n$ lub $X = C_n$). Tak więc $\gamma_p(G_i) = 1$.

■

Lemat 4.1.2. *Jeżeli w grafie X istnieje wierzchołek uniwersalny, to $n_p(X[G_1, G_2, ..., G_n]) = 1$.*

Dowód. Niech x_j będzie wierzchołkiem uniwersalnym grafu X, tzn. $N_X(x_j) = n - 1$. Niech w będzie dowolnym wierzchołkiem zbioru $V(G_j)$. Z Własności 4.1.3 (str. 57) wynika, że aby udowodnić tezę lematu wystarczy pokazać, iż dla każdego wierzchołka $v \neq w$, $v \in V(X[G_1, G_2, ..., G_n])$ istnieje droga długości dwa między w i v w grafie $X[G_1, G_2, ..., G_n]$. Ponieważ G_j jest grafem spójnym, w którym $|V(G_j)| \geqslant 2$, to istnieje wierzchołek $w' \in V(G_j)$ taki, że $ww' \in E(X[G_1, G_2, ..., G_n])$. Z definicji grafu $X[G_1, G_2, ..., G_n]$ wynika, że wierzchołek w jest sąsiedni z każdym wierzchołkiem zbioru $V(X[G_1, G_2, ..., G_n]) - V(G_j)$, gdyż x_j jest wierzchołkiem uniwersalnym grafu X. Zatem jeżeli $v \in V(X[G_1, G_2, ..., G_n]) - V(G_j)$, to istnieje droga: $v - w' - w$ między v i w w grafie $X[G_1, G_2, ..., G_n]$. Jeżeli $v \in V(G_j)$, to istnieje droga: $v - y - w$ w grafie $X[G_1, G_2, ..., G_n]$, gdzie y jest dowolnym wierzchołkiem zbioru $V(X[G_1, G_2, ..., G_n]) - V(G_j)$. Ostatecznie, dla każdego wierzchołka $v \neq w$ istnieje droga długości dwa łącząca v i w w grafie $X[G_1, G_2, ..., G_n]$, co kończy dowód.

■

Wniosek 4.1.2. *$n_p(K_n[G_1, G_2, ..., G_n]) = 1$ dla $n \geqslant 2$ oraz $n_p(W_{n-1}[G_1, G_2, ..., G_n]) = 1$ dla $n \geqslant 4$, gdzie $W_{n-1} = K_1 + C_{n-1}$.*

Uwaga 4.1.1. Można zauważyć, że jeżeli $n_p(X[G_1, G_2, ..., G_n]) = 1$, to nie zawsze istnieje wierzchołek uniwersalny w grafie X. Jeżeli na przykład, X jest grafem P_4, to wówczas $n_p(P_4[G_1, G_2, G_3, G_4]) = 1$ ale w drodze P_4 nie istnieje wierzchołek uniwersalny.

Lemat 4.1.3. *Niech $V(X) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Wówczas $p_d(X[G_1, G_2, ..., G_n]) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $i \in \{1, 2, ..., n\}$ takie, że x_i jest wierzchołkiem uniwersalnym grafu X oraz $\gamma_p(G_i) = 1$.*

Dowód. Załóżmy, że $p_d(X[G_1, ..., G_n]) = 1$, co jest równoważne, na podstawie Własności 4.1.9 (str. 58), z faktem że $\gamma_p(X[G_1, G_2, ..., G_n]) = 1$ oraz $\delta(X[G_1, ..., G_n]) \geqslant 2$. Ponieważ $\gamma_p(X[G_1, G_2, ..., G_n]) = 1$, to w grafie $X[G_1, G_2, ..., G_n]$ musi istnieć wierzchołek uniwersalny $y_i \in V(G_i)$ dla pewnego $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Stąd wynika, że $\gamma_p(G_i) = 1$. Pozostaje pokazać, że x_i jest wierzchołkiem uniwersalnym grafu X. Przypuśćmy, że x_i nie jest wierzchołkiem uniwersalnym grafu X. Wówczas istnieje wierzchołek $x_j \neq x_i$, który nie jest sąsiedni z x_i w grafie X. Z definicji grafu $X[G_1, G_2, ..., G_n]$ wynika, że w grafie $X[G_1, G_2, ..., G_n]$ nie ma krawędzi pomiędzy wierzchołkami zbiorów $V(G_i)$ i $V(G_j)$. To przeczy założeniu, że y_i jest wierzchołkiem uniwersalnym grafu $X[G_1, G_2, ..., G_n]$. Zatem wierzchołek x_i jest wierzchołkiem uniwersalnym grafu X.
Załóżmy teraz, że istnieje $i \in \{1, 2, ..., n\}$ takie, że x_i jest wierzchołkiem uniwersalnym grafu X oraz $\gamma_p(G_i) = 1 = |\{z_i\}|$. Wtedy $\gamma_p(X[G_1, G_2, ..., G_n]) = |\{z_i\}| = 1$. Z

definicji grafu $X[G_1, G_2, ..., G_n]$ otrzymujemy, że $deg_{X[G_1,G_2,...,G_n]}(z) \geqslant 2$ dla każdego wierzchołka $z \in V(G_i)$. Ponieważ dla każdego $j \in \{1, 2, ..., n\}$ G_j jest grafem spójnym oraz $|V(G_j)| \geqslant 2$, to każdy wierzchołek ze zbioru $V(G_j)$ ma w tym zbiorze co najmniej jednego sąsiada. Dlatego też, każdy wierzchołek spoza zbioru $V(G_i)$ ma co najmniej dwóch sąsiadów w zbiorze $V(X[G_1, G_2, ..., G_n])$. Zatem $\delta(X[G_1, G_2, ..., G_n]) \geqslant 2$. Z Własności 4.1.9 (str. 58) wynika, że $\gamma_p(X[G_1, G_2, ..., G_n]) = 1$, co należało pokazać.

■

Lemat 4.1.4. *Niech $X = P_n$ lub $X = C_n$ dla $n \geqslant 2$. Wtedy*

$$n_p(X[G_1, G_2, ..., G_n]) = \begin{cases} l & \text{dla} \quad n = 5l, \\ l+1 & \text{dla} \quad \text{pozostałych } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Dowód. Przeprowadzimy dowód tylko dla $X = P_n$, gdyż dowód w przypadku $X = C_n$ jest analogiczny. Jeżeli $n = 2, 3$, to graf X zawiera wierzchołek uniwersalny i z Lematu 4.1.2 otrzymujemy $n_p(P_n[G_1, G_2, ..., G_n]) = 1$. Jeżeli $n = 4$, to $n_p(P_n[G_1, G_2, ..., G_n]) = |\{x\}| = 1$ dla dowolnego wierzchołka $x \in V(G_2) \cup V(G_3)$. Niech $n \geqslant 5$. Bez straty ogólności możliwe są cztery przypadki

Przypadek 1. $n = 5l$, $l \geqslant 1$. Pokażemy, że zbiór $S_1 = \{y^3, y^8, y^{13}, ..., y^{5l-2}\} \subset V(P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}])$, gdzie y^i jest dowolnym wierzchołkiem zbioru $V(G_i)$ dla każdego $i = 3, 8, 13, ..., 5l-2$, jest 1-maksymalnym np-zbiorem w grafie $P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]$. Z Lematu 4.1.1 wynika, że S_1 jest np-zbiorem w grafie $P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]$. Wystarczy zatem pokazać, że dla dowolnego wierzchołka $y \in V(P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]) - S_1$ istnieje wierzchołek $z \in V(P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]) - S_1 - \{y\}$ taki, że $yz \in E(P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}])$ oraz $|N_{P_{5l}[G_1,G_2,...,G_{5l}]}(z) \cap S_1| = 1$ (Własność 4.1.1, str. 56). Z definicji grafu $P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]$ wynika, że każdy wierzchołek zbioru $V(G_{1+5j})$, gdzie $j = 0, 1, ..., l-1$ jest sąsiedni w grafie $P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]$ z każdym wierzchołkiem $y^{2+5j} \in V(G_{2+5j})$, dla którego $|N_{P_{5l}[G_1,G_2,...,G_{5l}]}(y^{2+5j}) \cap S_1| = |\{y^{3+5j}\}| = 1$. Analogicznie, każdy wierzchołek zbioru $V(G_{5+5j})$, gdzie $j = 0, 1, ..., l-1$ jest sąsiedni w grafie $P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]$ z każdym wierzchołkiem $y^{4+5j} \in V(G_{4+5j})$ oraz $|N_{P_{5l}[G_1,G_2,...,G_{5l}]}(y^{4+5j}) \cap S_1| = |\{y^{3+5j}\}| = 1$. Co więcej, ze spójności grafu G_i dla każdego $i = 1, 2, ..., n$ otrzymujemy, że każdy wierzchołek zbioru $V(G_{2+5j})$ dla $j = 0, 1, ..., l-1$ jest sąsiedni w grafie $P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]$ z pewnym wierzchołkiem $y_{2+5j} \in V(G_{2+5j})$. Dodatkowo, z definicji grafu $P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]$, $|N_{P_{5l}[G_1,G_2,...,G_{5l}]}(y_{2+5j}) \cap S_1| = |\{y^{3+5j}\}| = 1$. Analogicznie, każdy wierzchołek zbioru $V(G_{4+5j})$, gdzie $j = 0, 1, ..., l-1$ jest sąsiedni w grafie $P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]$ z pewnym

wierzchołkiem $y_{4+5j} \in V(G_{4+5j})$ oraz $|N_{P_{5l}[G_1,G_2,...,G_{5l}]}(y_{4+5j}) \cap S_1| = |\{y^{3+5j}\}| = 1$. Stąd wynika, że S_1 jest 1-maksymalnym np-zbiorem w grafie $P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]$ mocy l. Zatem $n_p(P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]) \leqslant l$. Jeżeli $l = 1$ (tzn. $n = 5$), to oczywiście $n_p(P_5[G_1, ..., G_5]) = 1$. Załóżmy, że $l \geqslant 2$. Przypuśćmy, że $n_p(P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]) < l$. Wtedy istnieje 1-maksymalny np-zbiór w grafie $P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]$, powiedzmy S, taki, że $|S| \leqslant l - 1$. Skoro S jest np-zbiorem w grafie $P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]$, to z Lematu 4.1.1 wynika, że $|S \cap V(G_i)| \leqslant 1$ dla $i = 1, 2, ..., 5l$. Stąd wynika, że $S = \{s_p \in V(P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]) \colon \quad S \cap V(G_{i_p}) = \{s_p\}\}$, gdzie $p = 1, 2, ..., m$. Co więcej, skoro S jest 1-maksymalnym np-zbiorem w grafie $P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]$, to z Własności 4.1.1 (str. 56) wynika, że dla każdego wierzchołka $u \in V(P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]) - S$ istnieje w grafie $P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]$ droga długości dwa łącząca wierzchołki u i s_p dla pewnego $p \in \{1, 2, ..., m\}$. Ponadto, z definicji grafu $P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]$ wynika, że dla ustalonego p istnieje droga długości dwa łącząca wierzchołki u i s_p wtedy i tylko wtedy, gdy $u \in V(G_{i_q})$ oraz $|i_p - i_q| \leqslant 2$. Oznacza to, że dla ustalonego p, u jest dowolnym wierzchołkiem jednego z 5 grafów G_{i_q} z ciągu $(G_1, G_2, ..., G_{5l})$. Ponieważ $|S| \leqslant l - 1$, to u jest dowolnym wierzchołkiem jednego z $5(l-1)$ grafów z ciągu $(G_1, G_2, ..., G_{5l})$. Ponieważ $5(l-1) < 5l$, to w ciągu $(G_1, G_2, ..., G_{5l})$ istnieją grafy, w których żaden wierzchołek nie jest połączony drogą długości dwa w grafie $P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]$ z żadnym wierzchołkiem ze zbioru S. Oznacza to, że S nie jest 1-maksymalnym np-zbiorem w grafie $P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]$, co wynika z Własności 4.1.1 i jest sprzeczne z założeniem. Zatem $n_p(P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]) \geqslant l$ dla $l \geqslant 2$.
Ostatecznie $n_p(P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{5l}]) = l$ dla $l \geqslant 1$.

Przypadek 2. $n = 5l+1$, $l \geqslant 1$. Oznaczmy, $S_2 = S_1 \cup \{y^{5l+1}\} \subset V(P_{5l+1}[G_1, ..., G_{5l+1}])$, gdzie y^i jest również dowolnym wierzchołkiem zbioru $V(G_i)$ dla $i = 5l+1$. Zauważmy, że $|S_2| = l + 1$. W analogiczny sposób jak w Przypadku 1 można pokazać, że S_2 jest $n_p(P_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}])$-zbiorem.

Przypadek 3. $n = 5l+2$, $l \geqslant 1$. Oznaczmy, $S_3 = S_1 \cup \{y^{5l+2}\} \subset V(P_{5l+2}[G_1, ..., G_{5l+2}])$, gdzie y^i jest również dowolnym wierzchołkiem zbioru $V(G_i)$ dla $i = 5l+2$. Zauważmy, jak poprzednio, że $|S_3| = l + 1$ oraz S_3 jest $n_p(P_{5l+2}[G_1, G_2, ..., G_{5l+2}])$-zbiorem.

Przypadek 4. $n = 5l + 3$ lub $n = 5l + 4$, $l \geqslant 1$. Bez straty ogólności rozważań, niech $n = 5l + 3$ oraz niech $S_4 = S_1 \cup \{y^{5l+3}\} \subset V(P_{5l+3}[G_1, G_2, ..., G_{5l+3}])$, gdzie y^i jest również dowolnym wierzchołkiem zbioru $V(G_i)$ dla $i = 5l + 3$. Zauważmy, jak wcześniej, że $|S_4| = l+1$ oraz, że S_4 jest $n_p(P_{5l+3}[G_1, G_2, ..., G_{5l+3}])$-zbiorem, co kończy dowód lematu.

■

Symbolem $\{p_d(P_n[G_1, ..., G_n])\}_{n\in N-\{1\}}$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich możliwych liczb $p_d(P_n[G_1, ..., G_n])$ dla dowolnego ciągu grafów $(G_1, G_2, ..., G_n)$ i drogi P_n, gdzie $n \geqslant 2$.

Lemat 4.1.5. $\{p_d(P_n[G_1, ..., G_n])\}_{n\in N-\{1\}} = \{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1, \sum\limits_{k=1}^{n} |V(G_k)|\}$.

Dowód. Nietrudno zauważyć, że dla $n = 2$ mamy $p_d(P_2[G_1, G_2]) = 1$, gdy $\gamma_p(G_1) = 1$ lub $\gamma_p(G_2) = 1$, a w przeciwnym wypadku $p_d(P_2[G_1, G_2]) = |V(G_1)| + |V(G_2)|$. Niech $n \geqslant 3$. Rozważymy przypadki

Niech $n = 3l$ $(l \geqslant 1)$ oraz dla każdego $i = 0, 1, 2, ..., l-1$, $\gamma_p(G_{2+3i}) = 1$. Wówczas $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor = l$. Pokażemy, że zbiór $S_1 = \{y^2, y^5, y^8, ..., y^{3l-1}\} \subset V(P_{5l}[G_1, G_2, ..., G_{3l}])$, gdzie y^i jest wierzchołkiem uniwersalnym grafu G_i dla każdego $i = 2, 5, 8, ..., 3l-1$, jest 1-maksymalnym pd-zbiorem w grafie $P_{3l}[G_1, G_2, ..., G_{3l}]$. Nie trudno sprawdzić, że S_1 jest pd-zbiorem w grafie $P_{3l}[G_1, G_2, ..., G_{3l}]$. Dodatkowo, dla każdego wierzchołka $u \in V(P_{3l}[G_1, G_2, ..., G_{3l}]) - S_1$ istnieje wierzchołek $v \in V(P_{3l}[G_1, G_2, ..., G_{3l}]) - S_1$ różny od u taki, że $uv \in E(P_{3l}[G_1, G_2, ..., G_{3l}]$, co wynika z definicji grafu $P_{3l}[G_1, G_2, ..., G_{3l}]$. Co więcej, wierzchołek v ma w grafie $P_{3l}[G_1, G_2, ..., G_{3l}]$ dokładnie jednego sąsiada należącego do zbioru S_1, gdyż S_1 jest pd-zbiorem w grafie $P_{3l}[G_1, G_2, ..., G_{3l}]$. Z powyższych faktów wynika, że dla każdego wierzchołka $u \in V(P_{3l}[G_1, G_2, ..., G_{3l}]) - S_1$ istnieje wierzchołek $v \in V(P_{3l}[G_1, G_2, ..., G_{3l}]) - S_1$ taki, że $|N_{P_{3l}[G_1,G_2,...,G_{3l}]}(v) \cap (S_1 \cup \{u\})| = 2$. Zatem S_1 jest 1-maksymalnym pd-zbiorem w grafie $P_{3l}[G_1, G_2, ..., G_{3l}]$. Stąd wynika, że $p_d(P_{3l}[G_1, G_2, ..., G_{3l}]) \leqslant |S_1| = l$. Przypuśćmy, że $p_d(P_{3l}[G_1, G_2, ..., G_{3l}]) < l$. Wówczas istnieje 1-maksymalny pd-zbiór w grafie $P_{3l}[G_1, G_2, ..., G_{3l}]$, powiedzmy S, mocy co najwyżej $l-1$. Z definicji grafu $P_{3l}[G_1, G_2, ..., G_{3l}]$ wynika, że zbiór S jest zbiorem doskonale dominującym tylko w podgrafie grafu $P_{3l}[G_1, G_2, ..., G_{3l}]$ indukowanym przez zbiór, do którego należą wierzchołki z co najwyżej $2(l-1) + l - 1 = 3l - 3$ grafów ciągu $(G_1, G_2, ..., G_{3l})$. Zatem S nie jest pd-zbiorem w $P_{3l}[G_1, G_2, ..., G_{3l}]$, sprzeczność. Oznacza to, że $p_d(P_n[G_1, G_2, ..., G_n]) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ dla $n = 3l$ $(l \geqslant 1)$.

Niech $n \neq 3l$ $(l \geqslant 1)$ oraz dla każdego $i = 0, 1, ..., l$, $\gamma_p(G_{1+3i}) = 1$ lub $\gamma_p(G_{n-3i}) = 1$. Wówczas $n = 3l + 1$ lub $n = 3l + 2$ oraz $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1 = l + 1$. Oznaczmy, $S_2 = \{y^1, y^4, y^7, ..., y^{3l+1}\}$ oraz $S_3 = S_1 \cup \{y^{3l+2}\}$, gdzie y^i jest również wierzchołkiem uniwersalnym grafu G_i dla każdego $i = 1, 4, 7, ..., 3l+1, 3l+2$. Zauważmy, że $|S_2| = |S_3| = l+1$ oraz, jak w przypadku $n = 3l$, S_2 i S_3 są $p_d(P_n[G_1, G_2, ..., G_n])$-zbiorami odpowiednio dla $n = 3l+1$ i $n = 3l+2$. Oznacza to, że $p_d(P_n[G_1, G_2, ..., G_n]) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$ dla $n = 3l+1$ i $n = 3l+2$ $(l \geqslant 1)$.

Załóżmy, że $n = 3l$ $(l \geqslant 1)$ oraz istnieje $i \in \{0, 1, ..., l-1\}$, dla którego $\gamma_p(G_{2+3i}) \neq 1$

albo $n = 3l + 1$ $(l \geqslant 1)$ oraz istnieje $j \in \{0, 1, ..., l\}$, dla którego $\gamma_p(G_{1+3j}) \neq 1$ albo $n = 3l+2$ $(l \geqslant 1)$ oraz istnieje $k \in \{0, 1, ..., l\}$, dla którego $\gamma_p(G_{n-3k}) \neq 1$. Zauważmy, że w każdym z wymienionych trzech przypadków jeżeli istnieje właściwy 1-maksymalny pd-zbiór S w grafie $P_n[G_1, G_2, ..., G_n]$ to, S jest pd-zbiorem w $P_n[G_1, G_2, ..., G_n]$. Z Wniosku 4.1.1 wynika, że:
(1) dla każdego $i = 1, 2, ..., n$ $|S \cap V(G_i)| \leqslant 1$,
(2) dla każdych dwóch różnych $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ jeżeli $|S \cap V(G_i)| = |S \cap (G_j)| = 1$, to $N_X[x_i] \cap N_X[x_j] = \emptyset$, gdzie $x_i, x_j \in V(X)$ oraz
(3) dla każdego $i = 1, 2, ..., n$ jeżeli $|S \cap V(G_i)| = 1$, to $\gamma_p(V(G_i)) = 1$.
Z własności (1)-(3) wynika, że jedynym pd-zbiorem w grafie $P_n[G_1, G_2, ..., G_n]$ jest cały zbiór wierzchołków tego grafu. Oznacza to, że $p_d(P_n[G_1, G_2, ..., G_n]) = \sum\limits_{k=1}^{n} |V(G_k)|$. To kończy dowód lematu.

■

Oznaczmy, $\{p_d(C_n[G_1, ..., G_n])\}_{n \in N-\{1,2\}}$ zbiór wszystkich możliwych liczb $p_d(C_n[G_1, ..., G_n])$ dla dowolnego ciągu grafów $(G_1, G_2, ..., G_n)$ i cyklu C_n, gdzie $n \geqslant 3$.

Lemat 4.1.6. $\{p_d(C_n[G_1, ..., G_n])\}_{n \in N-\{1,2\}} = \{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor, \sum\limits_{k=1}^{n} |V(G_k)|\}$.

Dowód. Załóżmy, że $n = 3l$ $(l \geqslant 1)$ oraz istnieje $j \in \{1, 2, ..., n\}$ takie, że dla każdego $i = 0, 1, ..., l$, $\gamma_p(G_{j+3i}) = 1$. Wówczas $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor = l$. Bez straty ogólności rozważań, niech $j = 2$. Używając tych samych argumentów co w części pierwszej dowodu Lematu 4.1.5 można pokazać, że zbiór $S = \{y^2, y^5, y^8, ..., y^{3l-1}\}$, gdzie y^i jest wierzchołkiem uniwersalnym grafu G_i dla każdego $i = 2, 5, 8, ..., 3l - 1$, jest $p_d(C_{3l}[G_1, ..., G_{3l}])$-zbiorem oraz, że $p_d(C_{3l}[G_1, ..., G_{3l}]) = l$.

Ponieważ w pozostałych przypadkach dowód przebiega analogicznie jak dowód Lematu 4.1.5 dlatego został pominięty.

■

W pracy [22] udowodnione zostały własności zbiorów prawie doskonałych w grafach $\mathbf{X}_{i=1}^{n} G_i$, $\bigotimes_{i=1}^{n} G_i$ dla $n = 2$, a w przyjętej do druku pracy [26] dla $n \geqslant 2$. Przypomnę definicje tych grafów. Niech $n \geqslant 2$. Uogólnionym produktem kartezjańskim grafów $G_1, ..., G_n$ nazywamy graf $\mathbf{X}_{i=1}^{n} G_i$, w którym $V(\mathbf{X}_{i=1}^{n} G_i) = V(G_1) \times \cdots \times V(G_n) =$

$X_{i=1}^{n}V(G_i)$ oraz $(x_1,...,x_n)(y_1,...,y_n) \in E(\mathbf{X}_{i=1}^{n}G_i)$, jeżeli istnieje $j \in \{1,2,...,n\}$ takie, że $x_jy_j \in E(G_j)$ i $x_i = y_i$ dla $i \neq j$. Zauważmy, że $\mathbf{X}_{i=1}^{n}G_i = (\mathbf{X}_{i=1}^{n-1}G_i) \times G_n$. Uogólnionym silnym produktem grafów $G_1,...,G_n$ nazywamy graf $\bigotimes_{i=1}^{n} G_i$, w którym $V(\bigotimes X_{i=1}^{n}G_i) = V(G_1) \times \cdots \times V(G_n) = X_{i=1}^{n}V(G_i)$ oraz $(x_1,...,x_n)(y_1,...,y_n) \in E(\bigotimes_{i=1}^{n} G_i)$, jeżeli $(x_1,...,x_n)(y_1,...,y_n) \in E(\mathbf{X}_{i=1}^{n}G_i)$ lub jeżeli $x_iy_i \in E(G_i)$ dla $i = 1,2,...,n$. Zauważmy, że $\bigotimes_{i=1}^{n} G_i = (\bigotimes_{i=1}^{n-1} G_i) \otimes G_n$. Główne rezultaty zawarte w wyżej wymienionych pracach ([22], [26]) podają warunek konieczny i wystarczający na to aby zbiór $S = X_{i=1}^{n}S_i$, gdzie $S_i \subseteq V(G_i)$, wierzchołków grafu $\mathbf{X}_{i=1}^{n}G_i$ oraz $\bigotimes_{i=1}^{n} G_i$ dla $n \geqslant 2$ był 1-maksymalnym np-zbiorem w tym grafie. Z takiej charakteryzacji 1-maksymalnych np-zbiorów wynikają oszacowania liczby $n_p(\mathbf{X}_{i=1}^{n}G_i)$ oraz $n_p(\bigotimes_{i=1}^{n} G_i)$ wyrażone za pomocą liczb $n_p(G_i)$ lub $\alpha(G_i)$.

4.2. Zależności między rozszerzalnością grafu w sensie zbiorów prawie doskonałych a rozszerzalnością grafu w sensie zbiorów doskonale dominujących

Przypomnę definicje grafów k-rozszerzalnych w sensie zbiorów prawie doskonałych (krótko: k-np-rozszerzalnych) i k-rozszerzalnych w sensie zbiorów doskonale dominujących (krótko: k-pd-rozszerzalnych). Niech $n_p(G) \neq |V(G)|$ oraz niech k będzie liczba całkowitą taką, że $1 \leqslant k \leqslant n_p(G) - 1$. Wówczas graf G nazywamy k-rozszerzalnym w sensie zbiorów prawie doskonałych, jeżeli każdy k-elementowy np-zbiór można rozszerzyć do $n_p(G)$-zbioru. Niech $p_d(G) \neq |V(G)|$ oraz niech k będzie liczba całkowitą taką, że $1 \leqslant k \leqslant p_d(G) - 1$. Mówimy, że graf G jest k-rozszerzalny w sensie zbiorów doskonale dominujących, jeżeli każdy k-elementowy pd-zbiór można rozszerzyć do $p_d(G)$-zbioru. Nie trudno zauważyć, że jeżeli G jest grafem k-np-rozszerzalnym, to G nie musi być grafem $(k+1)$-np-rozszerzalnym. Nie trudno również zauważyć, że jeżeli G jest grafem k-pd-rozszerzalnym, to G nie musi być grafem $(k-1)$-pd-rozszerzalnym ani grafem $(k+1)$-pd-rozszerzalnym. Rzeczywiście, jeżeli $G = P_6$, to G jest grafem 1-np-rozszerzalnym oraz 3-pd-rozszerzalnym ale G nie jest grafem 2-np-rozszerzalnym, 2-pd-rozszerzalnym ani 4-pd-rozszerzalnym. Poniższe twierdzenie podaje relację między k-rozszerzalnością w sensie zbiorów prawie doskonałych (k-np-rozszerzalnością) i k-rozszerzalnością w sensie zbiorów doskonale dominujących (k-pd-rozszerzalnością).

Twierdzenie 4.2.1. *Niech G będzie grafem spełniającym warunki:*

(1) *każdy $n_p(G)$-zbiór jest doskonale dominujący w G oraz*

(2) *istnieje zbiór doskonale dominujący w G mocy k.*

Jeżeli G jest grafem k-rozszerzalnym w sensie zbiorów prawie doskonałych, to G jest grafem k-rozszerzalnym w sensie zbiorów doskonale dominujących.

Dowód. Niech G będzie grafem k-np-rozszerzalnym spełniającym warunki (1)-(2) oraz niech $S \subset V(G)$ będzie dowolnym pd-zbiorem mocy k w tym grafie. Wówczas S jest np-zbiorem w grafie G oraz $|S| = k$. Z założenia, że graf G jest k-np-rozszerzalny wynika, że istnieje $n_p(G)$-zbiór, powiedzmy S', taki, że $S' \supset S$. Co więcej, S' jest 1-maksymalnym np-zbiorem w grafie G oraz $|S'| = n_p(G)$. Z warunku (1) oraz z Własności 4.1.6 (str. 57) wynika, że S' jest 1-maksymalnym pd-zbiorem w grafie G. Z Własności 4.1.10 (str. 59) wynika dodatkowo, że $p_d(G) = n_p(G)$. Zatem S' jest $p_d(G)$-zbiorem oraz $S \subset S'$. To oznacza, że graf G jest k-pd-rozszerzalny, co kończy dowód.

■

Przypomnijmy, że $En_p(G) \stackrel{def}{=} max\{k: \ \ G \text{ jest } k\text{-np-rozszerzalny}\}$ oraz $Ep_d(G) \stackrel{def}{=} max\{k: \ \ G \text{ jest } k\text{-pd-rozszerzalny}\}$. Z Twierdzenia 4.2.1 wynika związek pomiędzy liczbami rozszerzalności $En_p(G)$ i $Ep_d(G)$.

Wniosek 4.2.1. *Niech $En_p(G) = k$ i niech graf G spełnia warunki* (1) *i* (2) *z Twierdzenia 4.2.1. Wówczas $Ep_d(G) \geqslant En_p(G)$.*

Przedstawię teraz rezultaty dotyczące związku między k-rozszerzalnością i $(k-1)$-rozszerzalnością w sensie zbiorów prawie doskonałych.

Obserwacja 4.2.1. *Jeżeli G jest grafem k-np-rozszerzalnym dla $k \geqslant 2$, to istnieje zbiór prawie doskonały mocy $k-1$ w tym grafie.*

Dowód. Załóżmy, że w grafie G nie istnieje np-zbiór mocy $k-1$ ($k \geqslant 2$). Pokażemy, że G nie jest grafem k-np-rozszerzalnym. Z założenia wynika, że żaden podzbiór S zbioru wierzchołków grafu G mocy $k-1$ nie jest np-zbiorem w grafie G. Oznacza to, że $S \subset V(G)$, gdyż $V(G)$ jest np-zbiorem w grafie G. Jeżeli $|V(G) - S| = 1 = \{u\}$, to $|S \cup \{u\}| = |V(G)| = k$. Ponieważ graf k-np-rozszerzalny jest zdefiniowany dla liczby całkowitej k takiej, że $1 \leqslant k < |V(G)| - 1$, to G nie jest grafem k-np-rozszerzalnym, gdy $|V(G)-S| = 1 = \{u\}$. Niech $|V(G)-S| \geqslant 2$. Z założenia, że S nie jest np-zbiorem w grafie G oraz z definicji np-zbioru wynika, że dla każdego wierzchołka $u \in V(G)-S$, $|N_G(u) \cap S| \geqslant 2$. Skoro $|V(G) - S| \geqslant 2$, to dla każdego wierzchołka $u \in V(G) - S$ istnieje wierzchołek $v \in V(G) - (S \cup \{u\})$ taki, że $|N_G(v) \cap (S \cup \{u\})| \geqslant 2$. Zatem $S \cup \{u\}$ również nie jest np-zbiorem w grafie G. Ponieważ $|S \cup \{u\}| = k$, to z uwagi na dowolność wyboru podzbioru $S \subset V(G)$ mocy $k-1$ wnioskujemy, że w grafie G nie istnieje np-zbiór mocy k. Stąd wynika, że G nie jest grafem k-np-rozszerzalnym również, gdy $|V(G) - S| \geqslant 2$, co kończy dowód.

■

Twierdzenie 4.2.2. *Jeżeli G jest grafem k-np-rozszerzalnym dla $k \geqslant 2$, to G jest grafem $(k-1)$-np-rozszerzalnym.*

Dowód. Niech G będzie grafem k-np-rozszerzalnym ($k \geqslant 2$). Z Obserwacji 4.2.1 wynika, że w grafie G istnieje np-zbiór mocy $k-1$. Niech $S \subset V(G)$ będzie dowolnym np-zbiorem mocy $k-1$ w grafie G. Z założenia, że G jest grafem k-np-rozszerzalnym wynika, że $n_p(G) > k$. Zatem $|S| = k - 1 < n_p(G)$. Stąd otrzymujemy, że zbiór S nie jest 1-maksymalnym np-zbiorem w grafie G. Z definicji 1-maksymalnego np-zbioru wynika, że istnieje wierzchołek $u \in V(G) - S$ taki, że zbiór $S \cup \{u\}$ jest np-zbiorem w grafie G. Ponieważ graf G jest k-np-rozszerzalny i $|S \cup \{u\}| = k$, to istnieje $n_p(G)$-zbiór, powiedzmy S', taki, że $S' \supset S \cup \{u\}$. Zatem G jest grafem $(k-1)$-np-rozszerzalnym, co należało wykazać.

■

Następujący rezultat można udowodnić stosując tę samą technikę dowodzenia jak w dowodzie Twierdzenia 4.2.1

Twierdzenie 4.2.3. *Jeżeli G jest grafem k-pd-rozszerzalnym dla $k \geqslant 2$ oraz istnieje zbiór doskonale dominujący w G mocy $k-1$, to G jest grafem $(k-1)$-pd-rozszerzalnym.*

Zauważmy, że jeżeli w grafie G istnieje wierzchołek uniwersalny, to graf G zawiera jednowierzchołkowy pd-zbiór. Twierdzenie 4.2.3 pozwala wnioskować, że

Wniosek 4.2.2. *Jeżeli graf G jest grafem 2-pd-rozszerzalnym i zawiera wierzchołek uniwersalny, to G jest grafem 1-pd-rozszerzalnym.*

4.3. Rozszerzalność grafów: $P_n, C_n, P_n[G_1, ...G_n], C_n[G_1, ...G_n]$

Twierdzenia zamieszczone w tej części Rozdziału 4 będą dotyczyć rozszerzalności w sensie zbiorów prawie doskonałych i rozszerzalności w sensie zbiorów doskonale dominujących grafów: P_n, C_n, $P_n[G_1, G_2, ...G_n]$, $C_n[G_1, G_2, ...G_n]$ gdzie G_i jest grafem spójnym o co najmniej dwóch wierzchołkach dla każdego $i = 1, 2, ..., n$. Z Twierdzenia 4.2.2 (str. 70) wynika

Wniosek 4.3.1. *$En_p(G) = k$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba całkowita $k \geqslant 1$, że graf G jest k-np-rozszerzalny i nie jest $(k+1)$-np-rozszerzalny.*

Powyższy wniosek posłuży do wyznaczenia liczby np-rozszerzalności grafu P_n oraz C_n. Ponieważ graf k-np-rozszerzalny G jest zdefiniowany dla liczby całkowitej k takiej, że $1 \leqslant k \leqslant n_p(G) - 1$, gdzie $n_p(G) \neq |V(G)|$, to będziemy rozważać takie grafy G, w których spełniony jest warunek

$$2 \leqslant n_p(G) < |V(G)|. \tag{4.1}$$

Dla $G = P_n$ lub $G = C_n$ warunek (4.1) oznacza, że $n \geqslant 4$ (Własność 4.1.4, Własność 4.1.5, str. 57). Jeżeli $G = P_n[G_1, G_2, ...G_n]$ lub $G = C_n[G_1, G_2, ...G_n]$, to warunek (4.1) jest spełniony dla $n \geqslant 6$ (Lemat 4.1.4, str. 64).

Twierdzenie 4.3.1. *$En_p(P_n) = 1$ dla $n = 3l$ oraz $l \geqslant 2$. Dla pozostałych $n \geqslant 4$ droga P_n nie jest grafem k-rozszerzalnym w sensie zbiorów prawie doskonałych dla $k \geqslant 1$.*

Dowód. Niech $V(P_n) = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ dla $n \geqslant 4$. Załóżmy, że $n = 3l$. Najpierw pokażemy, że P_{3l} jest grafem 1-np-rozszerzalnym jeżeli $l \geqslant 2$, tzn. wykażemy, że każdy wierzchołek grafu P_{3l} należy do pewnego $n_p(P_{3l})$-zbioru. Utwórzmy zbiory:
$S_0 = \{p_i \in V(P_{3l}): \quad i \equiv 0 \bmod 3\} \cup \{p_1, p_2\}$,

$S_1 = \{p_i \in V(P_{3l}): \quad i \equiv 1 \bmod 3\} \cup \{p_{3l-1}, p_{3l}\}$ oraz
$S_i = \{p_1, p_4, ..., p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, p_{i+4}, p_{i+7}, ..., p_{3l}\}$ dla $i \equiv 2 \bmod 3$.
Zauważmy, że $S_0 \cup S_1 \cup \bigcup_{i \equiv 2 \; mod \; 3} S_i = V(P_{3l})$. Pokażemy, że S_j jest $n_p(P_{3l})$-zbiorem dla $j = 0, 1, i$, gdzie $i \equiv 2 \bmod 3$. Zauważmy, że podgraf grafu P_{3l} indukowany przez zbiór $V(P_{3l}) - S_j$ jest sumą rozłączną grafów K_2 oraz, że każdy wierzchołek zbioru $V(P_{3l}) - S_j$ jest sąsiedni z dokładnie jednym wierzchołkiem zbioru S_j dla $j = 0, 1, i$. Ta własność gwarantuje, że S_j jest 1-maksymalnym np-zbiorem w grafie P_{3l} (Własność 4.1.2, str. 56). Z Własności 4.1.4 (str. 57) wynika, że $n_p(P_{3l}) = l + 2$. Ponieważ $|S_j| = l + 2$ dla każdego $j = 0, 1, i$, to S_j jest $n_p(P_{3l})$-zbiorem dla każdego $j = 0, 1, i$, gdzie $i \equiv 2 \bmod 3$. Z Wniosku 4.3.1 (str. 71) wynika, że jeżeli pokażemy, że P_{3l} nie jest grafem 2-np-rozszerzalnym, to prawdziwa będzie równość $En_p(P_{3l}) = 1$. Oczywiste jest, że $S = \{p_3, p_4\}$ jest np-zbiorem w grafie P_{3l} mocy 2. Nietrudno zauważyć, że aby rozszerzyć zbiór S do $n_p(P_{3l})$-zbioru należy dodać wierzchołki p_1, p_2 do zbioru S, co wynika z Własności 4.1.8 (str. 58) oraz z definicji np-zbioru. Oznaczmy, $T = \{p_1, p_2, p_3\}$ i rozważmy graf $P_{3l} - T$, który jest izomorficzny z grafem $P_{3(l-1)}$. Przypomnijmy, że $P_{3(l-1)}$ jest grafem 1-np-rozszerzalnym, co zostało wyżej udowodnione dla $l \geqslant 3$. Stąd wynika, że zbiór $\{p_4\}$ jest podzbiorem właściwym pewnego $n_p(P_{3l} - T)$-zbioru, powiedzmy S', gdzie $|S'| = n_p(P_{3(l-1)}) = l - 1 + 2 = l + 1$, na podstawie Własności 4.1.4 (str. 57). Zatem zbiór S można rozszerzyć do 1-maksymalnego np-zbioru $S" = S' \cup T$ w grafie P_{3l}, przy czym jest to najmniejsze z możliwych takich rozszerzeń w grafie P_{3l} dla $l \geqslant 3$ (jeżeli $l = 2$, to $S" = V(P_6)$). Co więcej, $|S"| = |S'| + |T| = l + 1 + 3 = l + 4$ oraz $n_p(P_{3l}) = l + 2$. Zatem $S"$ nie jest $n_p(P_{3l})$-zbiorem. Oznacza to, że P_{3l} dla $l \geqslant 2$ nie jest grafem 2-np-rozszerzalnym, więc $En_p(P_{3l}) = 1$.
Załóżmy teraz, że $n \neq 3l$ oraz $n \geqslant 4$. Pokażemy, że P_n nie jest grafem k-np-rozszerzalnym dla $k \geqslant 1$. Z Wniosku 4.3.1 (str. 71) wynika, że wystarczy pokazać, iż P_n nie jest grafem 1-np-rozszerzalnym. Niech $S = \{p_3\} \subset V(P_n)$. W analogiczny sposób jak w przypadku $n = 3l$ można pokazać, że jeżeli $S"$ jest najmniejszym 1-maksymalnym np-zbiorem w grafie P_n oraz $S" \supset S$, to $|S"| = l+3$ jeżeli $n = 3l+1$ lub $|S"| = l+4$ jeżeli $n = 3l+2$. Ponieważ $n_p(P_{3l+1}) = l + 1$ oraz $n_p(P_{3l+2}) = l + 2$ (Własność 4.1.4, str. 57), to $S"$ nie jest $n_p(P_n)$-zbiorem. Zatem P_n dla $n \geqslant 4$ i $n \neq 3l$ nie jest grafem 1-np-rozszerzalnym i również nie jest grafem k-np-rozszerzalnym dla żadnego $k \geqslant 1$, co należało wykazać.

■

Ponieważ graf k-pd-rozszerzalny G jest zdefiniowany dla liczby całkowitej k takiej, że $1 \leqslant k \leqslant p_d(G) - 1$, gdzie $p_d(G) \neq |V(G)|$, to będziemy rozpatrywać takie grafy G, w których spełniony jest warunek

$$2 \leqslant p_d(G) < |V(G)|. \tag{4.2}$$

Jeżeli $G = P_n$ lub $G = C_n$, to warunek (4.2) jest spełniony dla $n \geqslant 4$ (Własność 4.1.11, str. 60).

Twierdzenie 4.3.2. *$Ep_d(P_n) = l + 1$ dla $n = 3l$ oraz $l \geqslant 2$ lub dla $n = 3l + 2$ oraz $l \geqslant 1$. Dla pozostałych $n \geqslant 4$ droga P_n nie jest grafem k-rozszerzalnym w sensie zbiorów doskonale dominujących dla $k \geqslant 1$.*

Dowód. Niech $V(P_n) = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ dla $n \geqslant 4$. Z definicji grafu k-pd-rozszerzalnego wynika, że jeżeli graf G jest k-pd-rozszerzalny, to $\gamma_p(G) \leqslant k \leqslant p_d(G) - 1$, więc $\gamma_p(G) \leqslant Ep_d(G) \leqslant p_d(G) - 1$. Jeżeli graf P_n byłby grafem k-pd-rozszerzalnym, to $\gamma_p(P_n) \leqslant k \leqslant p_d(P_n) - 1$. Zatem z Własności 4.1.11 i Własności 4.1.12 (str. 60) otrzymujemy, że jeżeli $n = 3l$ $(l \geqslant 2)$, to $l \leqslant k \leqslant l + 1$ oraz, że jeżeli $n = 3l + 2$ $(l \geqslant 1)$, to $l + 1 \leqslant k \leqslant l + 1$. Jeżeli $n = 3l + 1$ $(l \geqslant 1)$, to $\gamma_p(P_n) = l + 1$ oraz $p_d(P_n) = l + 1$ (Własność 4.1.11 i Własności 4.1.12, str. 60), więc $\gamma_p(P_n) > p_d(P_n) - 1$. Stąd otrzymujemy, że P_n nie może być grafem k-pd-rozszerzalnym dla $k \geqslant 1$, gdy $n = 3l + 1$. Wykażemy, że P_n jest grafem $(l + 1)$-pd-rozszerzalnym, gdy $n = 3l$ $(l \geqslant 2)$ lub $n = 3l + 2$ $(l \geqslant 1)$. Przypomnijmy, że $\delta(P_n) \leqslant 2$. Rozważymy dwa przypadki

Przypadek 1. $n = 3l$ dla $l \geqslant 2$. Niech S będzie dowolnym pd-zbiorem mocy $l + 1$ w grafie P_{3l}. Wówczas każdy wierzchołek zbioru S dominuje co najwyżej dwa wierzchołki spoza zbioru S. Rozważymy teraz moc zbioru $V(P_{3l})$ w zależności do postaci zbioru S. Gdyby $l + 1$ wierzchołków zbioru S dominowało dokładnie dwa wierzchołki spoza zbioru S, to $|V(P_{3l})| = |S| + |V(P_{3l}) - S| = l + 1 + 2(l + 1) = 3l + 3$, co jest sprzeczne z założeniem. Jeżeli l wierzchołków zbioru S dominowałoby dokładnie dwa wierzchołki spoza zbioru S, to $|V(P_{3l})| = |S| + |V(P_{3l}) - S| \geqslant 3l + 1$, co jest również sprzeczne z założeniem. Jeżeli $l - 1$ wierzchołków zbioru S dominowałoby dokładnie dwa wierzchołki spoza zbioru S, to z dwóch pozostałych wierzchołków zbioru S jeden dominowałby jeden wierzchołek spoza zbioru S, a drugi nie dominowałby wierzchołka spoza zbioru S, gdyż $|V(P_{3l})| = 3l$ (w przeciwnym wypadku $|V(P_{3l})| = 3l \pm 1$). Co więcej, ten warunek zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $S = \{p_1, p_2, p_5, p_8, ..., p_{3l-1}\}$ lub $S = \{p_2, p_5, p_8, ..., p_{3l-1}, p_{3l}\}$. Dodatkowo, obydwa te zbiory są zawarte w 1-maksymalnym pd-zbiorze w grafie P_{3l}, $\{p_1, p_2, p_5, p_8, ..., p_{3l-1}, p_{3l}\}$, którego moc wynosi $l+2 = p_d(P_{3l})$. Zatem S jest podzbiorem właściwym $p_d(P_{3l})$-zbioru. Jeżeli $l - 2$ wierzchołki zbioru S dominowałyby dokładnie dwa wierzchołki spoza zbioru S, to $|V(P_{3l})| = 3l$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z pozostałych trzech wierzchołków zbioru S dominowałby dokładnie jeden wierzchołek spoza zbioru S (w przeciwnym wypadku $|V(P_{3l})| < 3l$). Co więcej, zbiór S jest postaci: $\{p_2, p_3, p_6, p_9, ..., p_{3l}\}$. Zauważmy, że zbiór S zawiera się w zbiorze $\{p_1, p_2, p_3, p_6, p_9, ..., p_{3l}\}$, który jest 1-maksymalnym pd-zbiorem mocy $l+2 = p_d(P_{3l})$ w grafie P_{3l}. Zatem zbiór S jest podzbiorem właściwym $p_d(P_{3l})$-zbioru. Jeżeli mniej niż $l-2$ wierzchołki zbioru S dominowałyby dokładnie dwa wierzchołki spoza zbioru S, to $|V(P_{3l})| < 3l$, sprzeczność. Oznacza to, że P_{3l} dla $l \geqslant 2$ jest grafem $(l+1)$-pd-rozszerzalnym.

Przypadek 2. $n = 3l + 2$ dla $l \geqslant 1$. Niech S będzie teraz dowolnym pd-zbiorem mocy $l+1$ w grafie P_{3l+2}. Analizując jak w Przypadku 1 otrzymujemy, że $|V(P_{3l})| = |S| + |V(P_{3l}) - S| = 3l + 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy l wierzchołków zbioru S dominuje dokładnie dwa wierzchołki spoza zbioru S oraz pozostały wierzchołek zbioru S dominuje dokładnie jeden wierzchołek spoza zbioru S. Co więcej, $S = \{p_1, p_4, p_7, ..., p_{3l+1}\}$ lub $S = \{p_2, p_5, p_8, ..., p_{3l+2}\}$. Zauważmy, że zbiór $\{p_1, p_4, p_7, ..., p_{3l+1}\}$ zawiera się w zbiorze $S' = \{p_1, p_4, p_7, ..., p_{3l+1}, p_{3l+2}\}$, a zbiór $\{p_2, p_5, p_8, ..., p_{3l+2}\}$ zawiera się w zbiorze $S" = \{p_1, p_2, p_5, p_8, ..., p_{3l+2}\}$. Ponieważ zbiory S' i $S"$ są 1-maksymalnymi pd-zbiorami w grafie P_{3l+2} oraz $|S'| = |S"| = l + 2 = p_d(P_{3l+2})$, to P_{3l+2} dla $l \geqslant 1$ jest grafem $(l+1)$-pd-rozszerzalnym, co kończy dowód twierdzenia.

■

Twierdzenie 4.3.3. *Niech n będzie liczbą całkowitą, $n \geqslant 4$. Wówczas $En_p(C_7) = 2$, $En_p(C_8) = 3$ oraz*

$$En_p(C_n) = \begin{cases} 1 & dla \quad n = 3l \quad jeżeli \quad l \neq 1, \\ 1 & dla \quad n = 3l+1 \quad jeżeli \quad l \neq 2, \\ 2 & dla \quad n = 3l+2 \quad jeżeli \quad l \neq 2. \end{cases}$$

Dowód. Niech $V(C_n) = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ dla $n \geqslant 4$.
Niech $n = 7 = 3l + 1$ dla $l = 2$. Równość $En_p(C_7) = 2$ wynika z faktu, że jedynymi np-zbiorami mocy 2 w grafie C_7 są zbiory postaci: $\{p_i, p_{i+1}\}$, $\{p_i, p_{i+3}\}$, $\{p_i, p_{i+4}\}$, gdzie $i = 1, 2, ..., 7$ oraz $p_{i+7} = p_i$. Bez straty ogólności, niech $i = 1$. Łatwo zauważyć, że zbiory $\{p_1, p_2\}$ i $\{p_1, p_5\}$ są zawarte w $n_p(C_7)$-zbiorze $\{p_1, p_2, p_5\}$ oraz, że zbiór $\{p_1, p_4\}$ jest zawarty w $n_p(C_7)$-zbiorze $\{p_1, p_4, p_7\}$. Ponieważ z definicji k-np-rozszerzalności wynika, że $1 \leqslant k \leqslant n_p(C_7) - 1 = 2$, to $En_p(C_7) = 2$.

Niech $n = 8 = 3l + 2$ dla $l = 2$. Równość $En_p(C_8) = 3$ wynika z faktu, że jedynymi np-zbiorami mocy 3 w grafie C_8 są zbiory postaci: $\{p_i, p_{i+1}, p_{i+2}\}$, $\{p_i, p_{i+1}, p_{i+3}\}$, $\{p_i, p_{i+1}, p_{i+4}\}$, gdzie $i = 1, 2, ..., 8$ oraz $p_{i+8} = p_i$. Bez straty ogólności, załóżmy, że $n = 1$. Oczywiste jest, że zbiory $\{p_1, p_2, p_3\}$ i $\{p_1, p_2, p_6\}$ są podzbiorami $n_p(C_8)$-zbioru $\{p_1, p_2, p_3, p_6\}$ oraz, że zbiór $\{p_1, p_2, p_5\}$ jest podzbiorem $n_p(C_8)$-zbioru $\{p_1, p_2, p_5, p_8\}$. Analogicznie jak dla $n = 7$ z tego, że $n_p(C_8) = 4$ otrzymujemy, że $En_p(C_8) = 3$.

Załóżmy, że $n \neq 7, 8$. Możliwe są trzy przypadki

Przypadek 1. $n = 3l$ dla $l \geqslant 2$. Pokażemy, że $En_p(C_{3l}) = 1$. Z Wniosku 4.3.1 (str. 71) wynika, że wystarczy pokazać, że C_{3l} jest grafem 1-np-rozszerzalnym (tzn. wystarczy pokazać, że każdy wierzchołek grafu C_{3l} należy do pewnego $n_p(C_{3l})$-zbioru) oraz, że nie jest on grafem 2-np-rozszerzalnym. Zauważmy, że $\{p_i\}$ jest np-zbiorem w grafie C_{3l} dla dowolnego $i = 1, 2, ..., 3l$. Bez straty ogólności załóżmy, że $i = 1$. Zauważmy, że zbiór $\{p_1, p_4, p_7, ..., p_{3l-2}\}$ jest $n_p(C_{3l})$-zbiorem, na mocy Własności 4.1.2 i Własności 4.1.5 (str. 57). Ponieważ $p_1 \in \{p_1, p_4, p_7, ..., p_{3l-2}\}$, więc to oznacza, że C_{3l} jest grafem 1-np-rozszerzalnym. Pokażemy teraz, że C_{3l} nie jest grafem 2-np-rozszerzalnym. Oznaczmy, $S = \{p_1, p_2\}$. Oczywiste jest, że S jest np-zbiorem w grafie C_{3l}. Rozumując analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 4.3.1 (str. 71) wnioskujemy, że jeżeli S" jest najmniejszym 1-maksymalnym np-zbiorem w grafie C_{3l} oraz $S" \supset S$, to $|S"| = l + 1$. Jednak S" nie jest $n_p(C_{3l})$-zbiorem, gdyż $n_p(C_{3l}) = l$ (Własność 4.1.5, str. 57). Zatem C_{3l} nie jest grafem 2-np-rozszerzalnym. Oznacza to, że $En_p(C_n) = 1$ dla $n = 3l$ i $l \neq 1$.

Przypadek 2. $n = 3l + 1$ dla $l \neq 2$. Pokażemy, że $En_p(C_{3l+1}) = 1$. Zauważmy, że C_{3l+1} jest grafem 1-np-rozszerzalnym, ponieważ zbiór $\{p_1, p_4, p_7, ..., p_{3l+1}\}$ jest rozszerzeniem zbioru $\{p_1\}$ do $n_p(C_n)$-zbioru, jak w Przypadku 1. Jeżeli $l = 1$, to C_n jest grafem 1-np-rozszerzalnym i nie jest grafem 2-np-rozszerzalnym, gdyż $n_p(C_4) = 2$, więc $En_p(C_4) = 1$. Jeżeli $l \geqslant 3$, to $S = \{p_1, p_6\}$ jest np-zbiorem w grafie C_{3l+1}. Dowodząc jak w Przypadku 1 otrzymujemy, że jeżeli S" jest najmniejszym 1-maksymalnym np-zbiorem w grafie C_{3l+1} oraz $S" \supset S$, to $|S"| = l{+}3$. Zatem S" nie jest $n_p(C_{3l+1})$-zbiorem, gdyż $n_p(C_{3l+1}) = l + 1$ (Własność 4.1.5, str. 57), więc C_{3l+1} dla $l \geqslant 3$ nie jest grafem 2-np-rozszerzalnym. Oznacza to, że $En_p(C_n) = 1$ dla $n = 3l + 1$ i $l \neq 2$.

Przypadek 3. $n = 3l + 2$ dla $l \neq 2$. Wykażemy, że $En_p(C_{3l+2}) = 2$ pokazując, że C_{3l+2} jest grafem 2-np-rozszerzalnym i nie jest grafem 3-np-rozszerzalnym (Wniosek 4.3.1, str. 71). Pokażemy, bez straty ogólności, że dowolny np-zbiór $\{p_1, p_i\}$, gdzie $i = 2, 4, 5, ..., 3l$, mocy 2 w grafie C_{3l+2} można rozszerzyć do $n_p(C_{3l+2})$-zbioru. Zauważmy, że jeżeli $i \equiv 0 \mod 3$, to $\{p_1, p_i\} \subset \{p_1, p_2, p_3, p_6, p_9, ..., p_{3l}\}$, jeżeli $i \equiv 1 \mod 3$, to $\{p_1, p_i\} \subset \{p_1, p_4, p_7, ..., p_{3l+1}, p_{3l+2}\}$, jeżeli $i \equiv 2 \mod 3$, to $\{p_1, p_i\} \subset$

$\{p_1, p_2, p_5, p_8, ..., p_{3l+2}\}$. Pokażemy, że zbiory: $\{p_1, p_2, p_3, p_6, p_9, ..., p_{3l}\} = S_0$, $\{p_1, p_4, p_7, ..., p_{3l+1}, p_{3l+2}\} = S_1$ oraz $\{p_1, p_2, p_5, p_8, ..., p_{3l+2}\} = S_2$ są $n_p(C_{3l+2})$-zbiorami. Zauważmy, że podgraf grafu C_{3l+2} indukowany przez zbiór $V(C_{3l+2}) - S_j$ dla $j = 0, 1, 2$ jest sumą rozłączną grafów K_2 oraz, że każdy wierzchołek zbioru $V(C_{3l+2}) - S_j$ jest sąsiedni z dokładnie jednym wierzchołkiem zbioru S_j dla $j = 0, 1, 2$. Ta własność gwarantuje, że S_j dla każdego $j = 0, 1, 2$ jest 1-maksymalnym np-zbiorem w grafie C_{3l+2} (Własność 4.1.2, str. 56). Z Własności 4.1.5 (str. 57) wynika, że $n_p(C_{3l+2}) = l + 2$. Ponieważ $|S_j| = l + 2$ dla każdego $j = 0, 1, 2$, to S_j jest $n_p(C_{3l+2})$-zbiorem dla każdego $j = 0, 1, 2$. Zatem C_{3l+2} jest grafem 2-np-rozszerzalnym. Jeżeli $l = 1$ (wówczas $n = 5$), to z definicji k-np-rozszerzalności wynika, że $1 \leqslant k \leqslant n_p(C_5) - 1 = 2$, więc $En_p(C_5) = 2$. Niech $n \geqslant 3$ oraz niech $S = \{p_1, p_2, p_7\} \subset V(C_{3l+2})$. Oczywiste jest, że S jest np-zbiorem w grafie C_{3l+2}. Podobnie jak w Przypadku 1 można wykazać, że jeżeli S" jest najmniejszym 1-maksymalnym np-zbiorem w grafie C_{3l+2} oraz $S" \supset S$, to $|S"| = l+4$. Zatem S" nie jest $n_p(C_{3l+2})$-zbiorem, gdyż $n_p(C_{3l+2}) = l+2$ (Własność 4.1.5, str. 57), więc C_{3l+2} dla $l \geqslant 3$ nie jest grafem 3-np-rozszerzalnym. Oznacza to, że $En_p(C_n) = 2$ dla $n = 3l + 2$ i $l \neq 2$. co kończy dowód twierdzenia.

■

Uwaga 4.3.1. Przypomnijmy, że $\gamma_p(C_n) = p_d(C_n)$, na mocy Własności 4.1.12 (str. 60). Nie istnieje więc liczba całkowita k taka, że $\gamma_p(C_n) \leqslant k \leqslant p_d(C_n) - 1$. Z definicji grafu k-rozszerzalnego w sensie zbiorów doskonale dominujących otrzymujemy, że cykl C_n dla $n \geqslant 4$ nie jest grafem k-rozszerzalnym w sensie zbiorów doskonale dominujących dla $k \geqslant 1$.

Twierdzenie 4.3.4. *$En_p(P_n[G_1, G_2, ..., G_n]) = 1$ dla $n = 5l + 1$ oraz $l \geqslant 1$. Graf $P_n[G_1, G_2, ..., G_n]$ dla pozostałych $n \geqslant 6$ nie jest grafem k-rozszerzalnym w sensie zbiorów prawie doskonałych dla $k \geqslant 1$.*

Dowód. Rozważmy dwa przypadki

Przypadek 1. $n = 5l + 1$ dla $l \geqslant 1$. Pokażemy, że $P_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]$ jest grafem 1-np-rozszerzalnym oraz, że nie jest on grafem 2-np-rozszerzalnym, skąd na mocy Wniosku 4.3.1 (str. 71) otrzymamy tezę. Niech S będzie dowolnym np-zbiorem mocy 1 w grafie $P_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]$. Oznaczmy, $S_0 = \{y^1, y^5, y^{10}, y^{15}, ..., y^{5l}\}$, $S_1 = \{y^1, y^6, y^{11}, ..., y^{5l+1}\}$, $S_2 = \{y^2, y^7, y^{12}, ..., y^{5l-2}, y^{5l+1}\}$, $S_3 = \{y^3, y^8, y^{13}, ..., y^{5l-2}, y^{5l+1}\}$ oraz $S_4 = \{y^1, y^4, y^9, y^{14}, ..., y^{5l-1}\}$, gdzie y^i jest dowolnym wierzchołkiem zbioru $V(G_i)$

dla $i = 1, 2, ..., 5l + 1$. Pokażemy, że S_t jest $n_p(P_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}])$-zbiorem dla $t = 0, 1, 2, 3, 4$. Zauważmy, że $|S_t \cap V(G_i)| \leqslant 1$ dla każdego $i = 1, 2, ..., 5l + 1$. Dodatkowo dla każdych dwóch różnych $i, j \in \{1, 2, ..., 5l + 1\}$ jeżeli $|S_t \cap V(G_i)| = |S_t \cap V(G_j)| = 1$, to $N_{P_{5l+1}}[x_i] \cap N_{P_{5l+1}}[x_j] = \emptyset$, gdzie $x_i, x_j \in V(P_{5l+1})$. Zatem, na mocy Lematu 4.1.1 (str. 60) S_t jest np-zbiorem w grafie $P_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]$. Co więcej, z definicji grafu $P_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]$ oraz ze spójności grafu G_i dla każdego $i = 1, 2, ..., 5l + 1$ wynika, że każdy wierzchołek $u \in V(P_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]) - S_t$ ma sąsiada $v \neq u$, $v \in V(P_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]) - S_t$, który jest sąsiedni z dokładnie jednym wierzchołkiem zbioru S_t. Na mocy Własności 4.1.1 (str. 56) oznacza to, że S_t jest 1-maksymalnym np-zbiorem w grafie $P_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]$. Ponieważ $|S_t| = l + 1$ dla każdego $j = 0, 1, 2, 3, 4$ oraz $n_p(P_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]) = l + 1$, na mocy Lematu 4.1.4 (str. 64), więc S_t jest $n_p(P_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}])$-zbiorem dla $t = 0, 1, 2, 3, 4$. Co więcej, $S \subset V(G_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant 5l + 1$, czyli $S \subset S_t$ dla $i \equiv t \bmod 5$. To dowodzi, że graf $P_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]$ jest 1-np-rozszerzalny. Wykażemy, że graf $P_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]$ nie jest 2-np-rozszerzalny. Załóżmy, że $l \geqslant 2$. Oznaczmy, $S = \{y_1, y_7\}$, gdzie $y_1 \in V(G_1)$ oraz $y_7 \in V(G_7)$. Oczywiste jest, że zbiór S jest np-zbiorem w grafie $P_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]$. Dodatkowo zbiór S nie jest 1-maksymalnym np-zbiorem w podgrafie grafu $P_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]$ indukowanym przez zbiór $V(G_1) \cup V(G_2) \cup ... \cup V(G_9)$ izomorficznym z grafem $P_9[G_1, G_2, ..., G_9]$. Zatem aby rozszerzyć zbiór S do $n_p(P_9[G_1, G_2, ..., G_9])$-zbioru, powiedzmy $S' \subset V(P_9[G_1, G_2, ..., G_9])$ należy dodać co najmniej jeden wierzchołek zbioru $V(P_9[G_1, G_2, ..., G_9]) - S$ do zbioru S. Oznaczmy, $G = P_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}] - V(P_9[G_1, G_2, ..., G_9])$. Zauważmy, że $G \cong P_{5(l-2)+2}[G_1, G_2, ..., G_{5(l-2)+2}]$, więc $n_p(G) = l - 2 + 1 = l - 1$ (na mocy Lematu 4.1.4, str. 64). Stąd wynika, że jeżeli S" jest najmniejszym 1-maksymalnym np-zbiorem w grafie $P_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]$ oraz $S \subset S$", to $|S"| = |S'| + l - 1 \geqslant |S| + 1 + l - 1 = l + 2$. Stąd otrzymujemy, że $|S"| > l + 1$, a z Lematu 4.1.4 (str. 64) wynika, że S" nie jest $n_p(P_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}])$-zbiorem. Zatem $P_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]$ nie jest grafem 2-np-rozszerzalnym, więc $En_p(P_n[G_1, G_2, ..., G_n]) = 1$ dla $n = 5l + 1$ oraz $l \geqslant 2$. Jeżeli $l = 1$, tzn. $n = 6$, to $n_p(P_6[G_1, G_2, ..., G_6]) = 2$, więc $En_p(P_6[G_1, G_2, ..., G_6]) = 1$.

Przypadek 2. $n \neq 5l+1$ dla $l \geqslant 2$ oraz $n \geqslant 6$. Pokażemy, że graf $P_n[G_1, G_2, ..., G_n]$ nie jest grafem 1-np-rozszerzalnym. Prowadząc analogiczne rozumowanie jak w Przypadku 1 dla zbioru $S = \{y_1, y_7\}$ nietrudno wykazać, że np-zbiór $\{y_4\} \subset V(P_n[G_1, G_2, ..., G_n])$, gdzie $y_4 \in V(G_4)$ nie da się rozszerzyć do $n_p(P_n[G_1, G_2, ..., G_n])$-zbioru. Zatem $P_n[G_1, G_2, ..., G_n]$ dla $n \neq 5l + 1$ dla $l \geqslant 2$ oraz $n \geqslant 6$ nie jest grafem 1-np-rozszerzalnym i również nie jest grafem k-np-rozszerzalnym dla żadnego $k \geqslant 1$, na mocy Wniosku 4.3.1 (str. 71), co kończy dowód twierdzenia.

■

Twierdzenie 4.3.5.

$$En_p(C_n[G_1, G_2, ..., G_n]) = \begin{cases} 2 & dla \quad n = 5l + 1 \quad jeżeli \quad l \geqslant 2, \\ 1 & dla \quad pozostałych\ n \geqslant 6. \end{cases}$$

Dowód. Rozważmy dwa przypadki

Przypadek 1. $n = 5l + 1$ dla $l \geqslant 2$. Pokażemy, że $C_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]$ jest grafem 2-np-rozszerzalnym oraz, że nie jest grafem 3-np-rozszerzalnym. Niech S będzie dowolnym np-zbiorem mocy 2 w grafie $C_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]$. Z Lematu 4.1.1 (str. 60) wynika, że $S = S_i = \{y^p, y^i\}$, gdzie y^i jest dowolnym wierzchołkiem zbioru $V(G_i)$ dla $i = 1, 2, ..., 5l + 11$ oraz $|p - i| \geqslant 3$. Bez straty ogólności niech $i = 1$. Zauważmy, że
jeżeli $i \equiv 0$ mod 5, to $S_i \subset \{y^1, y^5, y^{10}, y^{15}, ..., y^{5(l-1)}, y^{5l-2}\}$,
jeżeli $i \equiv 1$ mod 5, to $S_i \subset \{y^1, y^6, y^{11}, y^{16}, ..., y^{5(l-1)+1}, y^{5l-1}\}$,
jeżeli $i \equiv 2$ mod 5, to $S_i \subset \{y^1, y^4, y^7, , y^{12}, y^{17}, ..., y^{5l-3}\}$,
jeżeli $i \equiv 3$ mod 5, to $S_i \subset \{y^1, y^4, y^8, , y^{13}, y^{18}, ..., y^{5l-2}\}$,
jeżeli $i \equiv 4$ mod 5, to $S_i \subset \{y^1, y^4, y^9, , y^{14}, ..., y^{5l-1}\}$.
Analogicznie jak w Przypadku 1 poprzedniego twierdzenia, można pokazać, że powyższe nadzbiory zbiorów S_i są 1-maksymalnymi np-zbiorami w grafie $C_{5l+1}[G_1, ..., G_{5l+1}]$. Co więcej, $|S_i| = l + 1 = n_p(C_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}])$, na podstawie Lematu 4.1.4 (str. 64). Zatem powyższe nadzbiory są $n_p(C_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}])$-zbiorami, które zawierają S_i. To oznacza, że $C_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]$ jest grafem 2-np-rozszerzalnym dla $n = 5l+1$ i $l \geqslant 2$. Wykażemy, że graf $C_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]$ nie jest 3-np-rozszerzalny. Załóżmy, że $l \geqslant 3$. Oznaczmy, $S = \{y_1, y_4, y_{10}\}$, gdzie $y_1 \in V(G_1)$, $y_4 \in V(G_4)$ i $y_{10} \in V(G_{10})$. Oczywiste jest, że zbiór S jest np-zbiorem w $C_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]$, ale nie jest 1-maksymalnym np-zbiorem w podgrafie H_1 grafu $C_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]$ indukowanym przez zbiór $A = V(G_1) \cup V(G_2) \cup \cdots \cup V(G_{12}) \cup V(G_{5l}) \cup V(G_{5l-1})$. Zatem aby rozszerzyć zbiór S do $n_p(H_1)$-zbioru, powiedzmy S', należy dodać co najmniej jeden wierzchołek zbioru $A - S$ do zbioru S. Co więcej, graf $H_2 = C_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}] - A \cong P_{5(l-3)+1}[G_1, G_2, ..., G_{5(l-3)+1}]$ oraz $n_p(H_2) = l - 3 + 1 = l - 2$ (na mocy Lematu 4.1.4, str. 64). Stąd wynika, że najmniejszy 1-maksymalny np-zbiór w grafie $C_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]$, który zawiera S ma moc $|S'| + n_p(H_2) \geqslant |S| + 1 + l - 2 = l + 2$,

która jest większa niż $l+1 = n_p(C_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}])$. Zatem $C_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]$ dla $l \geqslant 3$ nie jest grafem 3-np-rozszerzalnym i również nie jest grafem k-np-rozszerzalnym dla żadnego $k \geqslant 3$, na mocy Wniosku 4.3.1 (str. 71), czyli $En_p(C_{5l+1}[G_1, G_2, ..., G_{5l+1}]) = 2$ dla $n = 5l + 1$ i $l \geqslant 3$. Jeżeli $l = 2$ oraz $n = 5l + 1$, to $n_p(C_{11}[G_1, G_2, ..., G_{11}]) = 3$, na podstawie Lematu 4.1.4 (str. 64), więc z definicji grafu k-np-rozszerzalnego otrzymujemy, $En_p(C_{11}[G_1, G_2, ..., G_{11}]) = 2$.

Przypadek 2. $n \neq 5l + 1$ dla $l \geqslant 2$ oraz $n \geqslant 6$. Pokażemy, że $C_n[G_1, G_2, ..., G_n]$ jest grafem 1-np-rozszerzalnym (tzn. pokażemy, że każdy wierzchołek y^i grafu $C_n[G_1, ..., G_n]$ należy do pewnego $n_p(C_n[G_1, G_2, ..., G_n])$-zbioru) oraz, że $C_n[G_1, G_2, ..., G_n]$ nie jest grafem 2-np-rozszerzalnym. Bez straty ogólności rozważań, niech $i = 1$. Jeżeli $n = 6$, to np-zbiór $\{y^1\}$, gdzie $y^1 \in V(G_1)$, jest zawarty w 1-maksymalnym np-zbiorze w $C_6[G_1, G_2, ..., G_6]$, $\{y^1, y^4\}$, gdzie $y^4 \in V(G_4)$. Zatem $C_6[G_1, G_2, ..., G_6]$ jest grafem 1-np-rozszerzalnym. Ponieważ $n_p(C_n[G_1, G_2, ..., G_n]) = 2$, to z definicji grafu k-np-rozszerzalnego otrzymujemy, $En_p(C_6[G_1, G_2, ..., G_6]) = 1$. Niech $n \geqslant 7$. Pokażemy, bez straty ogólności rozważań, że np-zbiór $S = \{y^1\}$, gdzie $y^1 \in V(G_1)$, jest podzbiorem właściwym pewnego $n_p(C_n[G_1, G_2, ..., G_n])$-zbioru. Rzeczywiście,
$S \subset \{y^1, y^6, y^{11}, ..., y^{n-4}\}$ jeżeli $n \equiv 0 \mod 5$,
$S \subset \{y^1, y^6, y^{11}, ..., y^{n-6}, y^{n-2}\}$ jeżeli $n \equiv 2 \mod 5$,
$S \subset \{y^1, y^6, y^{11}, ..., y^{n-2}\}$ jeżeli $n \equiv 3 \mod 5$ oraz
$S \subset \{y^1, y^6, y^{11}, ..., y^{n-3}\}$ jeżeli $n \equiv 4 \mod 5$,
gdzie y^j jest dowolnym wierzchołkiem zbioru $V(G_j)$ dla $j = 1, 6, ..., n - 2$. Analogicznie jak w Przypadku 1 można pokazać, że powyższe nadzbiory zbioru S są $n_p(C_n[G_1, G_2, ..., G_n])$-zbiorami. To dowodzi 1-np-rozszerzalności grafu $C_n[G_1, ..., G_n]$ dla $n \neq 5l + 1$. Wykorzystując podobną argumentację jak w Przypadku 1 otrzymujemy, że np-zbiór $\{y_1, y_7\}$, gdzie $y_1 \in V(G_1)$ i $y_7 \in V(G_7)$, nie da się rozszerzyć do $n_p(C_n[G_1, G_2, ..., G_n])$-zbioru, czyli $C_n[G_1, G_2, ..., G_n]$ nie jest grafem 2-np-rozszerzalnym. Z Wniosku 4.3.1 (str. 71) otrzymujemy ostatecznie, $En_p(C_n[G_1, G_2, ..., G_n]) = 1$ jeżeli $n \neq 5l + 1$ oraz $n \geqslant 6$, co kończy dowód twierdzenia.

■

Uwaga 4.3.2. Zauważmy, że $X[G_1, G_2, ..., G_n]$, gdzie $X = P_n$ albo $X = C_n$, nie jest grafem k-pd-rozszerzalnym dla żadnego $k \geqslant 1$.
Niech $X = P_n$. Załóżmy, że $P_n[G_1, G_2, ..., G_n]$ jest grafem k-pd-rozszerzalnym ($k \geqslant 1$). Wtedy $p_d(P_n[G_1, G_2..., G_n]) < |V(P_n[G_1, G_2..., G_n])|$ oraz $k \leqslant p_d(P_n[G_1, G_2..., G_n]) - 1$ i w grafie $P_n[G_1, G_2..., G_n]$ istnieje pd-zbiór S mocy k. Ponieważ z dowodu Lematu

4.1.5 (str. 66) wynika, że $p_d(P_n[G_1, G_2, ..., G_n]) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ jeżeli $n = 3l$ oraz dla każdego $i = 0, 1, 2, ..., l-1$, $\gamma(G_{2+3i}) = 1$, więc $|S| \leqslant \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1 = l-1$. Jeżeli natomiast $n = 3l+1$ albo $n = 3l + 2$ oraz dla każdego $i = 0, 1, ..., l$, $\gamma(G_{1+3i}) = 1$ lub $\gamma(G_{n-3i}) = 1$, to $p_d(P_n[G_1, G_2, ..., G_n]) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$, więc $|S| \leqslant \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1 - 1 = l$ (w pozostałych przypadkach $p_d(P_n[G_1, G_2, ..., G_n]) = |V(P_n[G_1, G_2, ..., G_n])|$). Skoro S jest pd-zbiorem w grafie $P_n[G_1, G_2, ..., G_n]$, to każdy wierzchołek spoza zbioru S jest dominowany przez dokładnie jeden wierzchołek ze zbioru S. Ponadto, z definicji grafu $P_n[G_1, G_2, ..., G_n]$ wynika, że jeden wierzchołek zbioru S dominuje wszystkie wierzchołki z co najwyżej 3 grafów z ciągu $(G_1, G_2, ..., G_n)$. Ponieważ $|S| \leqslant l - 1$, gdy $n = 3l$ oraz $|S| \leqslant l$, gdy $n = 3l+1$ albo $n = 3l+2$, dlatego wszystkie wierzchołki zbioru S dominują wszystkie wierzchołki z co najwyżej $3(l-1)$ grafów z ciągu $(G_1, G_2, ..., G_n)$, gdy $n = 3l$ oraz z co najwyżej $3l$ grafów z ciągu $(G_1, G_2, ..., G_n)$, gdy $n = 3l+1$ albo $n = 3l+2$. Zauważmy, że $3(l-1) < n$, gdy $n = 3l$ oraz $3l < n$, gdy $n = 3l+1$ albo $n = 3l+2$. Oznacza to, że w ciągu $(G_1, G_2, ..., G_n)$ istnieją grafy, w których żaden wierzchołek nie jest dominowany przez zbiór S, sprzeczność ponieważ S jest pd-zbiorem w grafie $P_n[G_1, G_2, ..., G_n]$. Podobną analizę można przeprowadzić dla $X = C_n$.

Skorowidz

Bibliografia

[1] C. Berge, *Some common properties for regularizable graphs, edge-critical graphs, and B-grafphs*, in: Graph Theory and Algorithms (Proc. Symp. Res. Inst. Electr. Comm., Tohoku Univ., Sendai, 1980), Lecture Notes in Computer Science, **108** (Springer, Berlin, 1987) 108-123.

[2] M. Borowiecki, A. Szelecka, *One-factorizations of the generalized Cartesian product and of the X-join of regular graphs*, Discussiones Mathematicae **13** (1993) 15-19.

[3] R. A. Brualdi, H. Perfect, *Extension of partial diagonals of matrices I*, Monatsh. Math. **75** (1971) 385-397.

[4] M. Burlet, J. Uhry, *Parity graphs*, Annals of Discrete Mathematics **21** (1984) 253-277.

[5] E. J. Cockayne, B. L. Hartnell, S. T. Hedetniemi, R. Laskar, *Perfect domination in graphs*, Journal of Combinatorics Information & System Sciences **18** (1993) 136-148.

[6] N. Dean, J. Zito, *Well-covered graphs and extendability*, Discrete Mathematics **126** (1994) 67-80.

[7] R. Diestel, *Graph Theory* (Springer-Verlag, New York, 1997).

[8] J. E. Dunbar, F. C. Harris, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, A. A. McRae, R. C. Laskar, *Nearly perfect sets in graphs*, Discrete Mathematics **138** (1995) 229-246.

[9] J. Edmonds, *Paths, trees and flowers*, Canad. J. Math. **17** (1965) 449-467.

[10] M. R. Fillows, M. N. Hoover, *Perfect domination*, Australasian Journal of Combinatorics **3** (1991) 141-150.

[11] T. Gallai, *Kritische Graphen II*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. **8** (1963) 373-395.

[12] T. Gallai, *Maximale Systeme unabhängiger Kanten*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. **9** (1964) 401-413.

[13] O. T. George, M. R. Sridharan, *On B-graphs*, Indian J. Pure Appl. Math. **12** (1981) 1088-1093.

[14] E. Györi, W. Imrich, *On the strong product of a k -extendable and an l-extendable graph*, Graph and Combinatorics **17** (2001) 245-253.

[15] E. Györi, M. D. Plummer, *The Cartesian product of a k-extendable and an l-extendable graph is $(k+l+1)$-extendable*, Discrete Mathematics **101** (1992) 87-96.

[16] D. J. Hartfiel, *A simplified form for nearly reducible and nearly decomposable matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. **24** (1970) 388-393.

[17] G. Hetyei, *Rectangular configurations which can be covered by* 2×1 *erctangles*, Pécsi Tan. Főisk Közl. **8** (1964) 351-367.

[18] T. W. Haynes, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, *Domination and independence subdivision numbers of graphs*, Discussiones Mathematicae Graph Theory **20** (2000) 271-280.

[19] A. Kotzig, *On the theory of finite graphs with a lineafactor I*, Mat.-Fyz. Časopis Slovensk. Akad. Vied **9** (1959) 73-91.

[20] A. Kotzig, *On the theory of finite graphs with a lineafactor II*, Mat.-Fyz. Časopis Slovensk. Akad. Vied **9** (1959) 136-159.

[21] A. Kotzig, *On the theory of finite graphs with a lineafactor III*, Mat.-Fyz. Časopis Slovensk. Akad. Vied **10** (1960) 205-215.

[22] M. Kwaśnik, M. Perl, *Nearly perfect sets in products of graphs*, Opuscula Mathematica 24/2 (2004) 177-180.

[23] M. Kwaśnik, M. Perl, *On special k-extendable graphs*, Graph Theory Notes of New York **XLVIII:**5 (2005) 39-42.

[24] L. Lovász, M. D. Plummer, *On minimal elementary bipartite graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **23** (1977) 127-138.

[25] C. H. C. Little, D. D. Grant, D. A. Holton, *On defect-d matching in graphs*, Discrete Mathematics **13** (1975) 41-54.

[26] M. Perl, *Nearly perfect sets in the n-fold products of graphs*, (2006) - przyjęte do druku w Opuscula Mathematica.

[27] M. Perl, *On specjal kinds of domination in a graph and its extendability*, (2005) - przedstawione do recenzji w Mathematica Slovaca.

[28] M. D. Plummer, *Some covering concepts in graphs*, J. Combin. Theory **8** (1970) 91-98.

[29] M. D. Plummer, *On n-extendable graphs*, Discrete Math. **31** (1980) 201-210.

[30] M. D. Plummer, *Matching extension in bipartite graphs*, Congressus Numerantium **54** (1988) 245-258.

[31] M. D. Plummer, *Matching extension and connectivity in graphs*, Congressus Numerantium **63** (1988) 147-160.

[32] Q. Yu, *A note on n-extendable graphs*, J. Graph Theory **16** (1992) 349-353.